Matemática Aplicada

Aula 10 - Aplicações da Matemática na Computação

Apresentação

Nesta aula, você verá exemplos práticos das aplicações da Matemática na Computação. Veremos como os conceitos de lógica, matrizes, proporções, sistemas numéricos e funções são utilizados no dia a dia para a resolução de problemas tecnológicos. Veremos também como um computador consegue perceber o nosso mundo através da sua visão matemática, realizar tarefas complexas e, em seguida, nos retornar resultados úteis e atraentes. Todas as aulas anteriores constituem conhecimentos prévios necessários para a compreensão desta aula.

Vídeo 01 - Apresentação

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- Ter uma melhor visão da aplicação dos conceitos vistos nas aulas anteriores à computação.
- Saber como o *hardware* de um computador usa a lógica e sistemas de numeração binários na realização de suas ações.
- Saber como matrizes são muito importantes em computação e, em particular, na área de Computação Gráfica.

Como os computadores funcionam?

Ao longo desta disciplina, vimos diversos tipos de problemas e como lidar com eles através da matemática. Mas você pode estar se perguntando: “Por que estudar tudo isso? Eu quero saber como o computador funciona, isso sim é interessante.” Bem, acredite ou não foi exatamente isso que vimos durante essas aulas. Um computador nada mais é do que um dispositivo que recebe um estímulo - **entrada** -, realiza transformações - **processamento** - sobre essas entradas e nos retornam um resultado - **saída** (como uma **função**). Mas para ter utilidade, o computador deve permitir executarmos as mais diversas funções, como mandar um recado pra um amigo pelo **Facebook**, dar o resultado de uma conta complexa (ou simples), exibir um filme, mostrar uma foto, entre muitas outras funções. Bem, mas como fazer isso? Você sabe o quão complexos são os sistemas e estruturas responsáveis por essa mágica tecnológica que tanto nos encanta? Se mergulharmos bem fundo, veremos que o computador nada mais é do que uma calculadora poderosíssima de 1's e 0's (o chamado **sistema binário**).

Atividade 01

Por que os computadores não utilizam o nosso sistema decimal para o cálculo? E como ele mostra pra nós os resultados no sistema decimal, se ele calcula em binário?

Entrada - Como os computadores percebem o mundo?

Mas por que 1's e 0's? Porque eles não calculam como nós no sistema decimal? Bem, porque como um sistema eletrônico, os computadores representam os números como níveis de tensão elétrica e é bem mais fácil para eles saberem distinguir se existe ou não uma tensão de 5 volts em uma entrada, do que distinguir 10 diferentes níveis de tensão (afinal o sinal pode ter um ruído, pode sofrer uma atenuação etc.). Os computadores então veem e representam internamente nosso mundo como entradas de 1's e 0's porque é fácil para eles calcularem tudo assim.

Em um rápido exemplo, quando aumentamos o som do computador para ouvir aquela música do AC/DC no volume 100, ele verifica a **porcentagem** de volume que o usuário pediu (100%) e atribui isso como a entrada da **função** “aumenta volume”. A função especifica que o aumento dos níveis de tensão na caixa de som deve mudar **proporcionalmente** à entrada inserida. O sinal de tensão binário é enviado do processador para as caixas de som que aumentam o volume, enquanto o seu tocador lê uma **matriz** de 0's e 1's que é a representação da música para o computador, antes mesmo de sua mãe bater na porta mandando acabar com o barulho.

Atividade 02

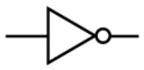
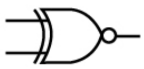
Para pesquisar: Como os sinais que estão no mundo exterior são codificados para a forma de representação interna dos computadores?

Processamento - Como os computadores “raciocinam”?

Mas como o computador consegue calcular tudo isso de uma forma tão rápida? Bem, aí precisamos falar um pouco sobre portas lógicas.

Portas lógicas

As portas lógicas (ou circuitos lógicos) são dispositivos que realizam uma operação lógica com um ou mais sinais de entrada, apresentando como resultado uma única saída. As portas lógicas foram usadas pela primeira vez na Engenharia para a resolução de problemas de circuitos de telefonia, pelo engenheiro da Bell Labs, Claude Elwood Shannon, considerado o fundador da teoria da informação (Ramo da teoria da probalidade e da matemática estatística que lida com sistemas de comunicação, tramissão de dados, criptografia, codificação, teoria do ruído, correção de erros, compressão de dados etc.). Elas funcionam segundo a álgebra booleana que estudamos, e podemos representá-las através de seus símbolos e nomes padronizados pela ANSI (American National Institute (Instituto Nacional Americano de Padrões) é a organização particular dos Estados Unidos, sem fins lucrativos, que tem por objetivo facilitar a padronização dos trabalhos de seus membros.). Vejamos que nomes estão atribuídos com as operações que estudamos.

Operador Booleano	Nome Padrão	Símbolo Padrão	Função Booleana
E	**AND**		$A \cdot B$
OU	**OR**		$A + B$
NÃO	**NOT**		$\overline{A}$
OU EXCLUSIVO	**XOR**		$A \oplus B$
NÃO E	**NAND**		$\overline{A \cdot B}$
NÃO OU	**NOR**		$\overline{A + B}$
NÃO OU EXCLUSIVO	**XNOR**		$\overline{A \oplus B}$

Em um rápido exemplo, podemos utilizar uma porta OU para permitir o funcionamento de uma porta automática de shopping da seguinte forma: conectamos dois sensores de movimento (um dentro e outro fora da entrada do shopping) à uma porta OU. Se um dos sensores (ou os dois) perceber uma pessoa querendo passar pela porta (entrando ou saindo) ele irá enviar um sinal de tensão na porta lógica e isso irá gerar um sinal de tensão (ligar motores) saindo da porta lógica, fazendo com que os motores da porta automática sejam acionados, abrindo as portas.

As portas lógicas são a alma da eletrônica digital e suas aplicações podem variar de um simples circuito para acionamento de portas, como no exemplo descrito anteriormente, aos megaprocessadores com vários núcleos. Por falar em processador, podemos simplificar um microprocessador típico com a simples figura:

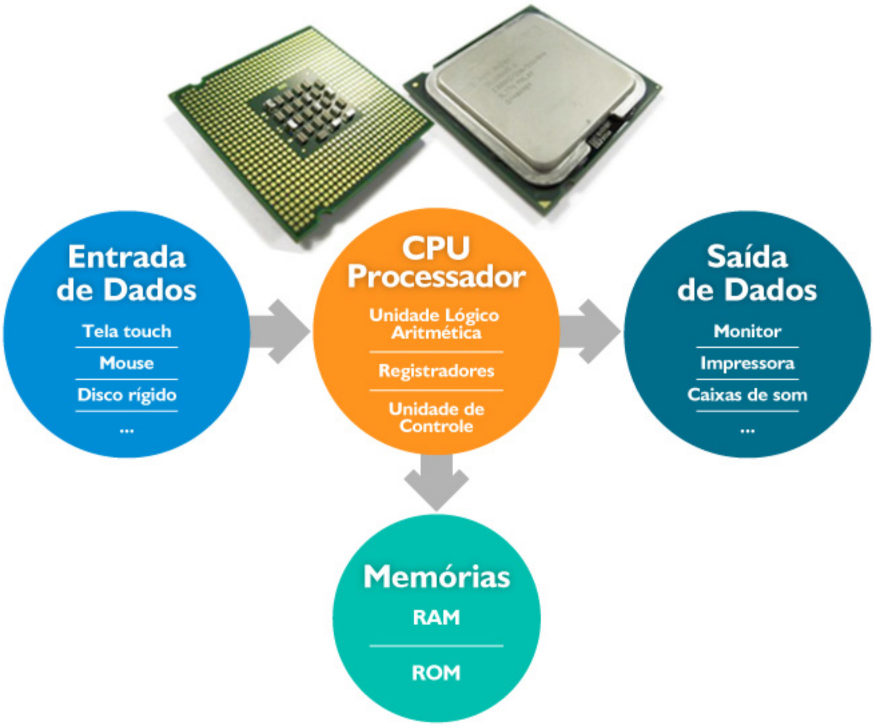


Figura 1 - Representação de um microprocessador típico

Vemos que o processador é composto por 3 partes principais: a UC - Unidade de Controle responsável por gerar todos os sinais que controlam as operações no interior e exterior da CPU, os registradores que armazenam os dados que estão sendo processados na CPU e, finalmente, a ULA - Unidade Lógico Aritmética. A ULA é a responsável pelos milhões de cálculos matemáticos realizados por segundo em um processador. E essa unidade é composta por portas lógicas que realizam cálculos simples em bilionésimos de segundo. Essa é a verdadeira estratégia dos computadores, transformar grandes problemas em problemas pequenos, fáceis de computar (o famoso “dividir para conquistar”).

Podemos ver uma ULA de 2 bits (ou seja, que pode realizar cálculos com números que podem ser representados por 2 bits), na figura disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:2-bit_ALU.png. Pode até parecer meio complicado agora, mas vemos claramente que só precisamos de algumas portas lógicas e fios para fazer nossa própria ULA caseira. Mas para fazer computadores compactos e super-rápidos você vai precisar de alguns milhões de dólares :P.

Atividade 03

Modele algum problema simples de lógica da Aula 07 (pode ser o da Segunda parte da construção da tabela-verdade da página 08). Mas você vai precisar de uma leve pesquisa antes de se aventurar. Procure no Google alguns textos, imagens e vídeos simples que te ajudem. Leve para mostrar ao seu tutor (ou poste no fórum) para que possamos ajudar em algum problema que restou.

Se liga!

As portas lógicas são utilizadas em todo equipamento eletrônico digital, do mais simples ao mais complexo. Você verá muito mais sobre elas e como elas conseguem efetuar cálculos numéricos se seguirem a ênfase eletrônica.

Saída - Como os computadores nos apresentam resultados?

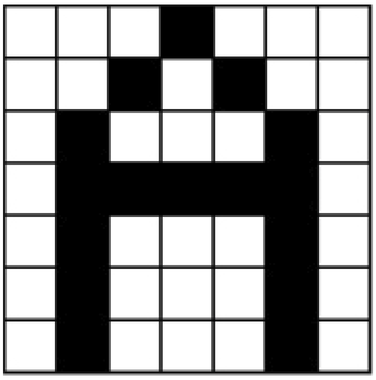
Ok, ok... os computadores percebem tudo e calculam tudo através de 0's e 1's, mas se eles nos apresentassem os resultados dos cálculos com 0's e 1's seria de uso inviável para muitas pessoas, simplesmente por nunca terem estudado o sistema de numeração binário. Você pode até se perguntar porque então não utilizar logo o sistema binário nas escolas desde cedo. Para ver algumas vantagens históricas para se usar uma determinada base, você pode assistir o já recomendado vídeo do programa português Isto É Matemática, o episódio É Aquela Base. Então, vejamos exemplos de como um computador transforma e consegue nos apresentar resultados de uma forma útil para nós, ou seja, como um monte de 0's e 1's se transformam em imagens de caracteres ou imagens que conseguimos, ler.

Matrizes na representação de imagens digitais

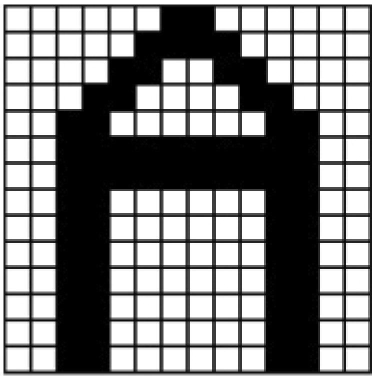
As telas de TV, computadores e celulares são formadas por uma grade de vários pontos pequeninos chamados de pixels. Um pixel é o menor elemento de uma imagem (*Picture Element*), vindo daí o seu nome. Essa grade de pontos também pode ser chamada de matriz de pixels, e quanto maior o número de pixels em uma determinada área da tela, maior a sua resolução e melhores serão as imagens. As imagens, por sua vez, também são grandes matrizes compostas de vários pontos. A junção desses pontos compõe uma foto digital como a conhecemos. Ao ampliarmos várias vezes uma imagem, podemos notar que ela vai ficando quadriculada ou como dizemos, com aspecto pixelado. Assim como nas telas, quanto maior o número de pixels uma imagem puder representar, melhor será a sua qualidade. Vemos essa denominação nas câmeras de foto quando dizem, por exemplo, que certa câmera é de 14 Megapixels - então uma foto tirada com essa câmera poderá representar até 14 milhões de pixels. A seguir, vemos um exemplo simples da representação de como uma figura de uma letra (A) pode ser representada através de uma matriz no computador.

255	255	255	0	255	255	255
255	255	0	255	0	255	255
255	0	255	255	255	0	255
255	0	0	0	0	0	255
255	0	255	255	255	0	255
255	0	255	255	255	0	255
255	0	255	255	255	0	255

Nessa imagem, cada posição da matriz corresponde à representação de um pixel. Para uma figura em escala de cinza, o computador entende que existem 255 níveis de branco, sendo 255 o branco total e 0 sendo o preto total. Então, o computador pinta na tela cada posição da matriz com sua devida cor e teremos:



Cada campo dessa matriz de representação possui um valor, e é o tamanho da matriz que vai nos dizer a resolução dessa imagem. Assim, cada vez que aumentarmos o tamanho da matriz (representando mais pixels) para representar o mesmo A, teremos uma imagem de melhor qualidade.



É basicamente a mesma ideia do ponto-cruz que sua mãe ou avó fazia, todas as imagens são representadas dessa forma no seu computador. Faça um teste: abra uma figura qualquer no Paint e aumente gradualmente o zoom de visualização, você vai ver que essa matriz vai ficar cada vez mais visível ao ponto que as imagens vão ficando “pixeladas”.

Porém, como queremos ver figuras coloridas, o computador reconhece três cores principais: vermelho, verde e azul (o famoso RGB). Assim, cada pixel pode ser representado por 3 números: um tom de vermelho, um tom de azul e um tom de verde - todas as cores que vemos no nosso computador são uma mistura dessas 3 cores. Uma figura colorida então é formada por uma matriz de 3 dimensões, ou 3 matrizes normais como conhecemos, sendo cada matriz responsável pela representação de uma camada de cor. Vejamos um exemplo.

Figura 2 - (A) Camada Vermelha; (B) Camada Verde; (C) Camada Azul e (D) Três Camadas Sobrepostas

Além da representação, podemos usar matrizes especiais que servem como filtros para adicionarmos efeitos às imagens (como os efeitos que fazemos no Photoshop, por exemplo), ou analisarmos aspectos importantes em uma imagem (como detecção de bordas e objetos, aspectos essenciais para sistemas de mapas e navegação robótica).

Ao realizarmos um tipo de multiplicação da matriz de representação de imagem com uma dessas matrizes especiais, obtemos efeitos como:

Figura 3 - (A) Suavização; (B) Aumentar nitidez; (C) Detecção de bordas e (D) Adicionar relevo

Atividade 04

Além da representação de imagens, em que problemas tecnológicos as matrizes também podem ser muito úteis?

No vídeo abaixo você pode ver uma breve revisão sobre trigonometria. É bem importante que você veja esse vídeo

Vídeo 02 - Revisão de Trigonometria

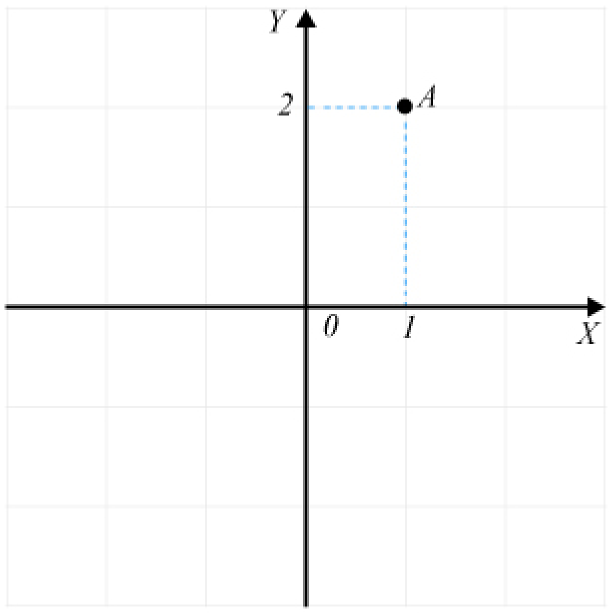
Você sabia da ligação entre a trigonometria e o 3D? Assista a esse episódio do programa português Isto É Matemática e veja como essas coisas estão interligadas.

Matrizes na representação de espaço vetorial

Além da representação de imagens em forma de pixels, as matrizes também são responsáveis pela representação de elementos vetoriais no espaço. Essa representação de elementos é o que torna possível construir imagens de objetos virtuais e animações com esses objetos, como vemos nos filmes e jogos de computador.

Mas vamos por partes! Vamos evitar usar uma linguagem muito matemática para mostrar apenas a essência da coisa.

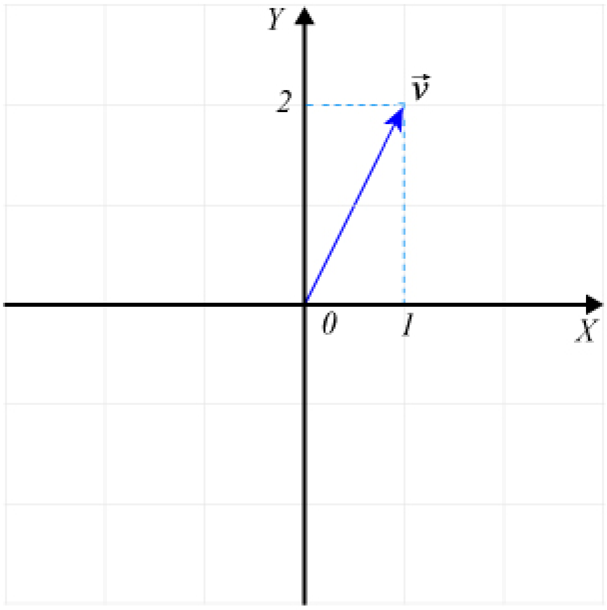
Partimos de um plano cartesiano que nada mais é do que um sistema de coordenadas gráficas que nos permite mostrar a posição de um ponto, curva ou plano no espaço.



Podemos representar onde se situa um ponto nesse plano cartesiano através de duas coordenadas: X e Y, sendo assim o plano cartesiano considerado um espaço bidimensional. No caso da figura anterior, temos que o ponto A em questão possui as coordenadas $(1, 2)$.

Através do plano cartesiano também podemos representar vetores, que são segmentos de reta orientados e muito utilizados na física para denotar forças agindo sobre um sistema.

Para representar um vetor utilizamos duas coordenadas da mesma forma, sendo que a origem do vetor sempre será o ponto $(0, 0)$, e a suas coordenadas corresponderão ao local da ponta do vetor.



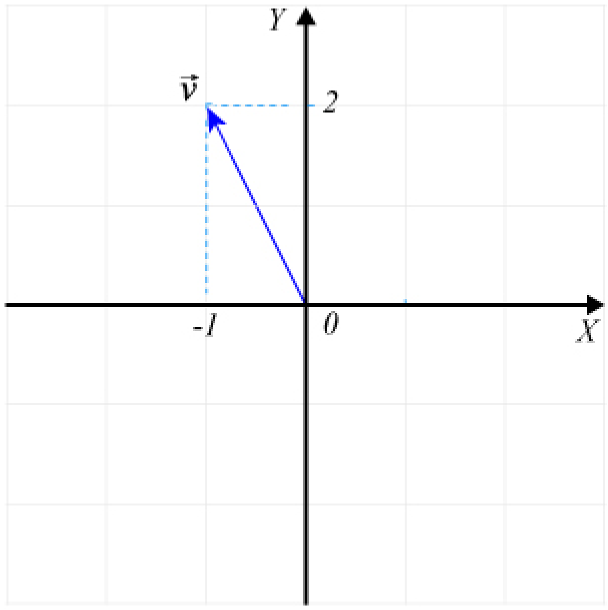
Então, nesse exemplo as coordenadas X e Y do vetor $\vec{v}$ são $(1, 2)$, ou como uma matriz:

$$\vec{v} = [1\ 2]$$

Podemos realizar diversas transformações de posição, e dimensão de vetores em um espaço vetorial. Para isso, utilizamos matrizes que nos ajudam a realizar essas **transformações lineares**. Por exemplo, para termos a reflexão desse vetor $\vec{v}$ no eixo de y, basta multiplicarmos sua matriz de coordenadas pela matriz:

$$[1\ \ 2] \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [-1\ \ 2]$$

E então, teremos o seguinte gráfico:



A matriz de transformação que usamos é um exemplo de uma matriz de rotação, que de forma genérica é apresentada da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix}$$

onde θ é o ângulo que queremos rotacionar o elemento no plano cartesiano.

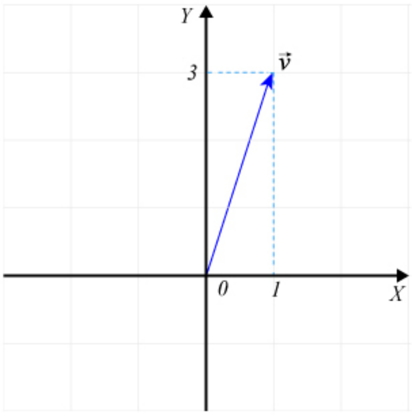
Além da rotação, temos também matrizes específicas para a translação:

$$\underbrace{[1 \ \ 2]}_{\text{Posição original do vetor}} + \underbrace{[Tx \ \ Ty]}_{\text{Tranlação do Vetor}} = \underbrace{[1 + Tx \ \ 2 + Ty]}_{\text{Vetor transladado}}$$

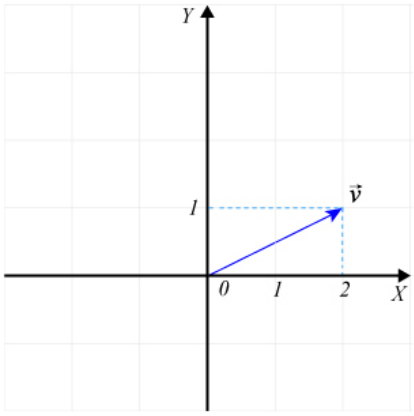
onde Tx e Ty é o quanto queremos mover o vetor no plano na escala de X e de Y respectivamente. E de escala:

$$\underbrace{[1 \ \ 2]}_{\text{Posição original do vetor}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} Ex & 0 \\ 0 & Ey \end{bmatrix}}_{\text{Escala do vetor}} = \underbrace{[1 \cdot Ex + 0 \ \ 2 \cdot Ey + 0]}_{\text{Vetor escalado}}$$

onde Ex e Ey é o quanto queremos redimensionar o vetor no plano na escala de X e de Y respectivamente. A seguir, veremos alguns exemplos de translação e escala no gráfico utilizando o nosso vetor $\vec{v}$ como vetor original.



$Tx = 0$, $Ty = 2$



$Ex = 2$, $Ey = ½$

Pense agora que esse ponto extremo do vetor corresponde a um pixel da imagem e que essas transformações devem ser realizadas em cada pixel. Em alguns casos, como a redução ou aumento da imagem, sem deformação, a mesma transformação é aplicada a todos os pixels, aproximando ou distanciando cada pixel da origem de maneira uniforme. Para isso, usamos o produto escalar (verifique multiplicando o vetor $\vec{v}$ por um valor escalar k qualquer) . Em outros, queremos deformar a imagem e aplicamos outras transformações ou mesmo transformações diferentes a pixels diferentes.

Vídeo 03 - Transformações Lineares - pt. 1

OBS: No ponto de vista da álgebra linear, uma matriz de translação não é uma transformação linear. Porém, as demais transformações citadas (rotação e escalas de ampliação ou redução) são sim transformações lineares. É importante ressaltar que isso não diminui em nada a importância das matrizes de translação nas aplicações que vimos aqui.

Vídeo 04 - Transformações Lineares - pt. 2

Mostramos aqui exemplos no espaço vetorial de 2 dimensões, mas todas essas representações e transformações podem ser estendidas para um espaço de 3 ou mais dimensões, para elementos 3D como polígonos e esferas. Como vivemos em um mundo de 3 dimensões, dimensões maiores que essa geralmente não são utilizadas em representações de imagens, mas na análise de outros tipos de dados que possuem mais dimensões. Essas transformações lineares são a base de todos os programas de modelagem de objetos 2D e 3D, desde programas como o Paint, CorelDraw, Photoshop, passando pelo AutoCad, 3DStudioMax até os programas profissionais que os grandes estúdios usam para fazer seus filmes de animação e efeitos especiais.

Final

Foi uma grande jornada até aqui, descobrimos esse maravilhoso mundo tecnológico através dos olhos matemáticos dos computadores e seus inventores. Aprendemos alguns conceitos que sem eles os computadores não poderiam existir e, dessa forma, construímos uma relação mais íntima com essa máquina que tanto nos fascina. Ainda bem que isso é só o começo! Foi ótimo estarmos juntos, esperamos que tenham gostado das aulas e qualquer crítica ou sugestão para o nosso material não hesite em nos procurar.

Grande abraço!

Leitura complementar

Deixamos aqui alguns applets sobre transformações lineares para você revisar e ver essas transformações na prática.

- http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/t2x2-br.html
- http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/t2x2-br.html
- http://mathforum.org/mathimages/Transformation_Matrix

Algumas funções em um gráfico 3D (muito bom :D)

- http://www.houseof3d.com/pete/applets/graph/index.html

Resumo

Nesta aula, vimos exemplos práticos das aplicações da matemática na computação, mostrando um pouco mais e com exemplos mais complexos como os assuntos vistos ao longo da disciplina são importantes para a computação. Em particular, vimos como o *hardware* de um computador usa a lógica e sistemas de numeração binários na realização de suas ações e exemplos de processamento de imagens. Dessa forma, o que estudamos sobre matrizes é essencial.

Autoavaliação

1. Desenhe o diagrama de blocos do hardware correspondente à fórmula lógica $(p \vee (q \wedge (r \vee \sim p)))$.
2. Escreva matrizes de ordem 7 que representam os caracteres E e O (maiúsculos) usando as mesmas convenções que usamos para o A no texto da aula.
3. O que acontece se multiplicarmos a matriz de ordem correspondente à letra A por ½ (meio)? Como fica a matriz? Se

trabalharmos em uma escala de preto e branco, na qual 255 é branco total e 0 é preto total, o que você acha que vai aparecer na tela? A letra terá o mesmo formato e as mesmas tonalidades?

4. Se o ponto extremo de uma figura estava nas coordenadas $x = 1$ e $y = 2$, ou seja, a matriz $[1 \;\; 2]$, e aplicamos um produto escalar com fator 2 a ela, ou seja, calcular $2[1 \;\; 2]$, o que vai acontecer com esse ponto?

Referências

TANENBAUM, Andrew S. **Organização estruturada de computadores.** 5. ed. São Paulo: Editora Prentice Hall do Brasil, 2007.

GONZALEZ, Rafael C.; WOODS, Richard E. **Digital Image Processing**, 1992, Addison-Wesley. Publishing Company, Inc.