Matemática Aplicada

Aula 09 - Funções

Apresentação

Nesta aula, você verá a definição, tipos e utilidades das chamadas funções matemáticas. São as funções matemáticas que descrevem matematicamente como tudo funciona: seja o sinal emitido por uma antena, o movimento dos objetos no espaço ou as tarefas a serem realizadas por um processador para emitir um resultado. Começaremos com algumas definições matemáticas. Em seguida, classificaremos as funções de diversas maneiras. Finalmente, veremos como gerar gráficos a partir delas. Na aula final desta disciplina, voltaremos a esse assunto apresentando exemplos de como os computadores utilizam as funções para funcionar.

Vídeo 01 - Apresentação

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- Descrever funções usando enumerações, equações ou gráficos.
- Realizar operações sobre funções.
- Aplicar funções em exemplos práticos.
- Avaliar algumas propriedades importantes de funções.
- Trabalhar com funções numéricas de primeiro e segundo grau.

Conhecimentos Prévios Necessários (Pré-requisitos)

Chamamos de produto cartesiano dos conjuntos X e Y o conjunto de todos os **pares ordenados** compostos por um elemento pertencente a X (o primeiro elemento do par) e um pertencente a Y (o segundo elemento do par). Podemos representar matematicamente a definição de produto cartesiano da seguinte forma:

$$X \times Y = \{(x, y) | x \in X \wedge y \in Y\}$$

(lê-se: o produto cartesiano de X com Y é o conjunto de todos os pares (x, y) tais que x pertence a X e y pertence a Y.)

O que é uma Função?

Uma **função** é uma **associação** ou um **mapeamento** entre elementos de dois conjuntos. Chamando esses conjuntos de X e Y, uma função f de X em Y associa, a cada elemento x de X, um único elemento y de Y. A existência dessa associação entre x e y através de f é normalmente representada por $y = f(x)$. Pensando computacionalmente, o valor x é a nossa entrada de dados e o valor y, por sua vez, é o resultado que a função nos fornece após processar o dado x. Então, para cada entrada x, teremos uma única saída y.

Uma função é então definida por três informações: os conjuntos X e Y, que chamaremos respectivamente de **conjunto de partida** e **conjunto de chegada,** e o **mapeamento** entre seus elementos. Há várias maneiras de definir esse **mapeamento**. As principais são: por uma **enumeração**, por uma **equação** ou por um **gráfico**.

Primeiramente, vejamos o que é uma definição por enumeração. Uma definição por **enumeração** deve dizer explicitamente o valor de y ou $f(x)$ para cada x do conjunto de partida. Isso pode ser feito através de tabelas, diagramas ou pela simples enumeração dos pares (x, y).

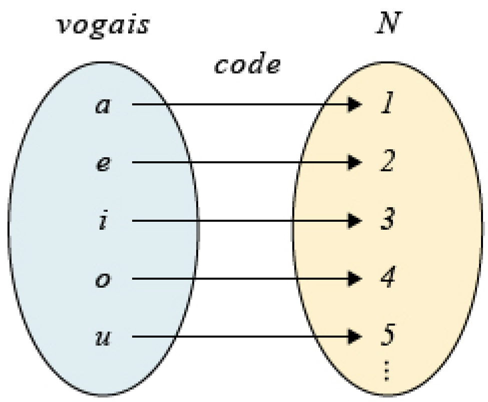
Como exemplo, vejamos a função $code$, que representa um código onde as vogais (pertencentes a um conjunto $VOGAIS = \{“a”, “e”, “i”, “o”, “u”\}$ são mapeadas em números naturais (pertencentes ao conjunto $\mathbb{N}$). Ela pode ter as seguintes representações:

$$code = \{(“a”, 1), (“e”, 2), (“i”, 3), (“o”, 4), (“u”, 5)\}$$

ou

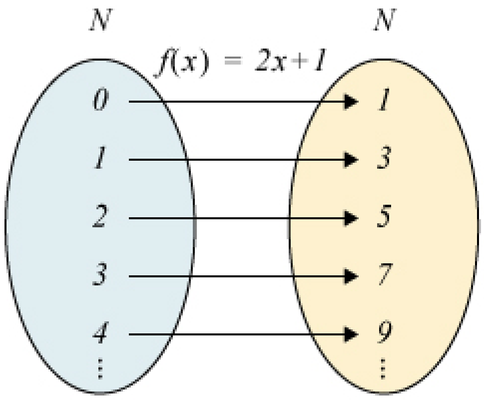
a	*1*
e	*2*
i	*3*
o	*4*
u	*5*

ou ainda



Essa representação, apesar de simples, tem uma limitação clara. O que você acha? Como poderíamos representar explicitamente o **mapeamento** de uma função que tem como conjunto de partida todo o conjunto dos inteiros, por exemplo? E dos reais? Não é possível, não é? Por isso usamos a definição por equação, que é a segunda maneira de descrição de funções que veremos aqui. A **equação** é uma regra que diz como obter o y ou $f(x)$ para cada x, através de um cálculo (que em computação chamamos de algoritmo).

Vejamos como exemplo a função $f(x) = 2x + 1$. Digamos que os nossos conjuntos de partida e de chegada são todos os números naturais ($\mathbb{N}$), começando do 0. Então, podemos calcular o valor associado a cada número natural multiplicando-o por 2 e, em seguida, somando 1. Temos então que $f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 5$ e assim por diante, como vemos no diagrama:



O importante nesse caso é que não foi preciso dizer o valor de cada $f(x)$ para todos os números naturais. Sempre que for necessário, esses valores podem ser calculados a partir da equação.

Notação

Para representar que uma função f possui como conjunto de partida o conjunto X e como conjunto de chegada o conjunto Y, escreve-se:

$$f : X \to Y$$

Atividade 01

1. Enumere todos os pares da função *capitais*, que mapeia cada estado do Brasil com sua capital.

Domínio e Imagem

O **domínio** de uma função é o conjunto de valores válidos como entrada para essa função, ou seja, o conjunto de valores x de X para os quais existe um valor y de Y associado a x por f, ou seja, $y = f(x)$. A **imagem** de uma função é conjunto de todas as saídas possíveis para essa função, ou seja, o conjunto de valores y de Y para os quais existe um valor x de X que está associado a y por f (ou seja, $y = f(x)$).

Se liga!

Frequentemente, considera-se o conjunto de partida X como sendo a mesma coisa que o domínio de uma função. No entanto, em programação, é muito útil permitir que existam valores x do conjunto de partida para os quais não existe um y associado, ou seja, que não façam parte do domínio da função. Um exemplo bem comum é o da divisão. Considere a divisão de inteiros como uma função chamada div que tem como entrada pares de inteiros (o dividendo e o divisor) e como saída um inteiro (o quociente). Nesse caso, qual seria o valor de $div(10, 0)$? Como div tem como saída números inteiros, $div(10, 0)$ deveria ser um número inteiro, não é? Mas esse número não existe... (dizemos que a função é indefinida para essa entrada). O par $(10, 0)$ é um par de inteiros e, portanto, faz parte do conjunto de partida (que é o produto cartesiano $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$), mas não faz parte do domínio da função, que não inclui os pares cujo segundo elemento, o divisor, é zero. Em programação, escreveríamos algo como

"a função div recebe 2 argumentos de tipo inteiro, *dividendo e divisor*. Se *divisor* for diferente de 0, execute a divisão, **senão** mostre um erro na tela".

Essas funções são chamadas de **funções parciais**. Aqui nesta aula, a não ser que seja dito explicitamente o contrário, procuraremos sempre fazer o conjunto de partida ser o domínio da função.

Vídeo 02 - Consumo de energia elétrica

Atividade 02

1. Considere a função *dobro*, que associa a cada número inteiro o seu dobro, ou seja, a função que tem como conjunto de partida e como conjunto de chegada os inteiros ($\mathbb{Z}$) e é descrita pela equação $f(x) = 2x$. Qual o domínio e qual a imagem da função *dobro*?

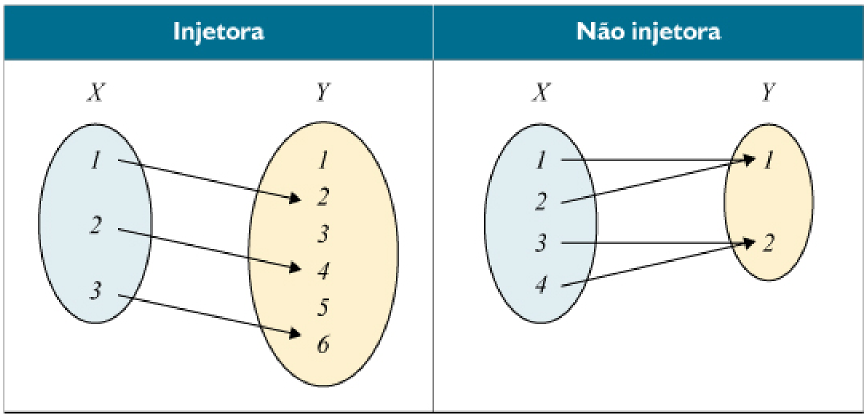
2. Qual o domínio e qual a imagem da função *capitais* da Atividade 1?

Injetividade, Sobrejetividade e Bijetividade de Funções

Como vimos, uma função $f : X \to Y$ associa cada elemento do seu conjunto de partida, X, a apenas um elemento do seu conjunto de chegada, Y. Se associasse algum elemento de X a mais de um elemento de Y, não seria uma função. Da mesma maneira, vimos que é possível distinguir as situações em que o domínio da função é X e outras (funções parciais) onde permite-se que o domínio da função seja um subconjunto de X. Nessas análises, estamos analisando o comportamento do **mapeamento** de f com relação aos elementos do conjunto de partida, X. O mesmo tipo de análise pode ser feito olhando os elementos do conjunto de chegada, Y. Nesse caso, obtemos a classificação das funções em **injetoras, sobrejetoras e bijetoras**, como veremos a seguir.

Funções Injetoras

Uma função f é **injetora** quando nenhum elemento da imagem está associado por f a mais de um elemento do domínio. Graficamente, uma função f é injetora quando nenhum elemento da imagem é atingido por mais de uma flecha na sua representação por diagrama.

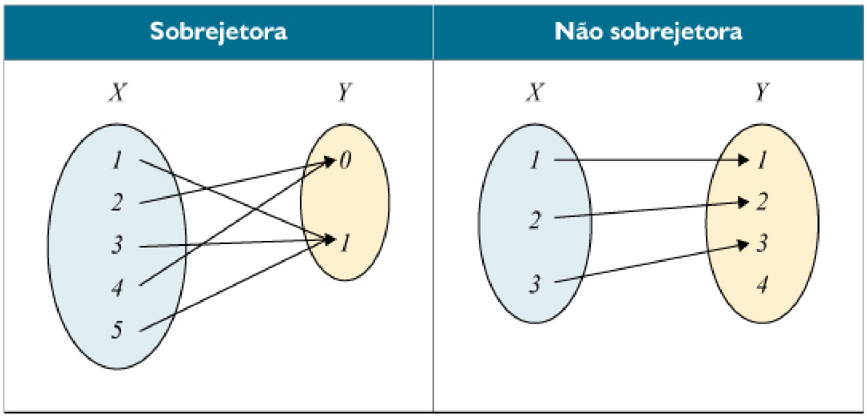


Se descrevemos f pela enumeração dos pares de valores associados por ela, a injetividade é vista pelo fato de que não há 2 pares diferentes com o mesmo segundo elemento. Por exemplo, a função $code$ vista anteriormente é injetora, mas a função $code2$, com os mesmos conjuntos de partida e de chegada que $code$, mas com os mapeamentos especificados a seguir, não é injetora, dado que em $code2$ tanto "i" quanto "u" são mapeadas no mesmo valor (3), ou seja, $code2(\text{“}i\text{”}) = 3$ e $code2(\text{“}u\text{”}) = 3$.

$$code2 = \{(\text{“}a\text{”}, 1), (\text{“}e\text{”}, 2), (\text{“}i\text{”}, 3), (\text{“}o\text{”}, 4), (\text{“}u\text{”}, 3)\}$$

Funções Sobrejetoras

Uma função f é **sobrejetora** quando todo elemento do conjunto de chegada está associado por f a pelo menos um elemento do domínio. Graficamente, uma função f é sobrejetora quando nenhum elemento do conjunto de chegada deixa de ser atingido por alguma flecha na sua representação por diagrama.



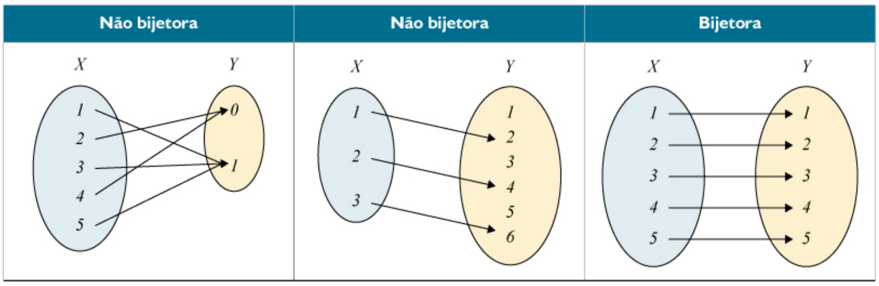
Se descrevemos f pela enumeração dos pares de valores associados por ela, a sobrejetividade é vista pelo fato de que existe pelo menos um par para cada elemento do conjunto de chegada. Por exemplo, a função $code$ vista anteriormente não é sobrejetora, pois o conjunto de chegada especificado era todo o conjunto dos números naturais, mas apenas os valores de 1 a 5 aparecem nos pares de $code$. A função $code3$, com os mesmos mapeamentos de $code$, mas com conjunto de chegada igual a $1, 2, 3, 4, 5$ é, no entanto, sobrejetora.

Se liga!

A propriedade de sobrejetividade mostra bem que apenas o mapeamento entre os valores não basta para definir uma função. É necessário também dizer qual é o conjunto de partida e o conjunto de chegada. Nos nossos exemplos, $code$ e $code3$ são funções diferentes e com propriedades diferentes, apesar de possuírem exatamente os mesmos pares, ou seja, o mesmo mapeamento de valores. Se assumimos que o domínio é igual ao conjunto de partida, podemos deduzir quem é o conjunto de partida a partir dos pares do mapeamento, mas não temos como dizer quem é o conjunto de chegada.

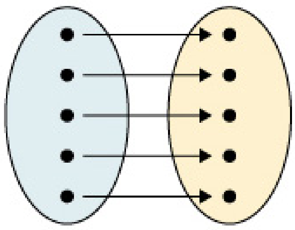
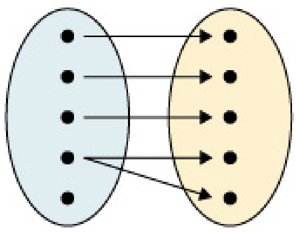
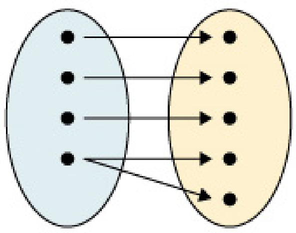
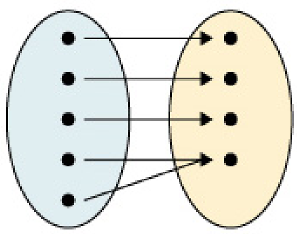
Funções Bijetoras

Uma função f é **bijetora** quando ela é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora. Como consequência, temos que uma função bijetora possui como domínio todo o conjunto de partida, como imagem todo o conjunto de chegada e todo elemento de cada um desses conjuntos está associado a exatamente um elemento do outro conjunto. Por essa razão, é também comum encontrar a terminologia **mapeamento de um para um** (*one to one mapping*, em inglês) para designar funções bijetoras.



Atividade 03

1. Dentre os mapeamentos a seguir, identifique quais são efetivamente funções e marque um X em cada casa que corresponde a uma propriedade satisfeita pelo mapeamento:

	Função	Injetora	Sobrejetora	Bijetora
	☐	☐	☐	☐
	☐	☐	☐	☐
	☐	☐	☐	☐
	☐	☐	☐	☐

ENVIAR

Vídeo 03 - Igualdade de Funções

Operações sobre Funções: Inversão e Composição

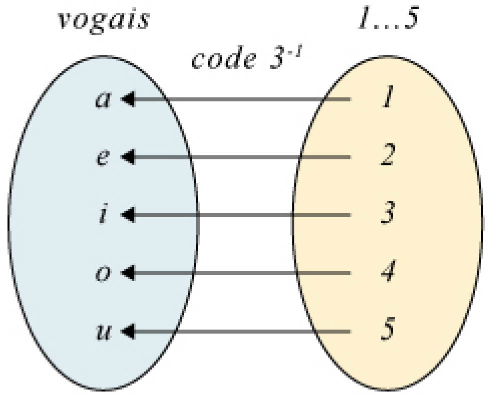
Até aqui vimos diversas maneiras de definir funções a partir de seus componentes: seus conjuntos de partida e chegada e seu mapeamento. No entanto, muitas vezes os problemas práticos que procuramos resolver como uso de funções nos levam a definir novas funções a partir de outras. Por exemplo, como podemos definir uma função que associa cada número inteiro i ao número inteiro $i - 1$ a partir da função f que associa todo número inteiro i ao número inteiro $i + 1$? E como definir uma função que associa cada número inteiro ao triplo do seu quadrado, a partir da função que fornece o triplo de um número e a função que fornece o quadrado de um número? Usamos para isso, respectivamente, a **inversão** de funções e a **composição** de funções, como veremos a seguir.

Função Inversa

Dada uma função $f : X \to Y$ a **função inversa** de f, quando ela existe, é a função $f^{-1} : Y \to X$ composta pelo mapeamento obtido invertendo-se cada par da função f. Graficamente, a inversão corresponde a inverter o sentido de cada flecha do diagrama de f.

Por exemplo, a inversão da nossa função $code3$ leva a $code3^{-1} : 1, 2, 3, 4, 5 \to VOGAIS$, tal que

$$code3^{-1} = \{(1, \text{“}a\text{”}), (2, \text{“}e\text{”}), (3, \text{“}i\text{”}), (4, \text{“}o\text{”}), (5, \text{“}u\text{”})\}$$



Pense um pouco, antes de ler a resposta a seguir, e veja se percebe por que a inversa nem sempre existe. Sempre podemos inverter as flechas do diagrama ou os pares da representação por enumeração dos pares do mapeamento, não? Que problemas podem acontecer, então?

Já pensou?

Se não conseguiu, não quer pensar mais um pouquinho?

Podemos continuar? Bom, vamos tentar inverter a função $code2$? Escreva os pares de $code2^{-1}$.

$$code2^{-1} = \{(1, \text{“}a\text{”}), (2, \text{“}e\text{”}), (3, \text{“}i\text{”}), (4, \text{“}o\text{”}), (3, \text{“}u\text{”})\}$$

Esse conjunto de pares corresponde a um mapeamento válido para uma função dos números naturais no conjunto *VOGAIS*? Não. Por quê? Pois o número 3 possui duas vogais diferentes associadas a ele,

$$(3, \text{“}i\text{”}), (3, \text{“}u\text{”})$$

e isso contraria a definição de função, não é? O que mudou de $code3$ para $code2$ que fez com que essa regra fosse quebrada? Um primeiro problema que salta aos olhos é a injetividade: $code3$ é injetora ao passo que $code2$ não é.

Mas, na realidade, há um segundo problema. A função $code2$ tem como conjunto de partida o conjunto $VOGAIS = \text{“}a\text{”}, \text{“}e\text{”}, \text{“}i\text{”}, \text{“}o\text{”}, \text{“}u\text{”}$ e como conjunto de chegada o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$), ao passo que $code3$ tem como conjunto de chegada o conjunto $1, 2, 3, 4, 5$. Nesse caso, podemos ver que, mesmo que $code2$ fosse injetora, $code2^{-1}$ não seria uma função de $\mathbb{N}$ em $VOGAIS$, pois vários números naturais não teriam vogal associada a eles. Esse é exatamente o caso da função $code$, que também não tem inversa, pois sua imagem é diferente do seu conjunto de chegada, ou seja, ela não é sobrejetora.

Conclusão: apenas funções bijetoras possuem uma função inversa.

Importante!

Essa regra vale quando consideramos a convenção clássica de que uma função deve ter o domínio igual ao conjunto de partida. Quando, como dissemos anteriormente no quadro **Se liga!** sobre domínio de funções em programação, aceitamos as chamadas funções parciais, funções injetoras também podem ser invertidas, gerando funções parciais.

Função Composta

Dadas duas funções

$$f : X \to Y$$

e

$$g : Y \to Z$$

a **composição** de f com g é a função

$$g \circ f : X \to Z$$

composta pelo mapeamento obtido associando cada x de X com $g(f(x))$, de $\mathbb{Z}$, sempre que $f(x)$ e $g(f(x))$ forem definidas. Se X é o domínio de f e Y o domínio de g, ou seja, se trabalhamos com a convenção clássica de que o conjunto de partida é igual ao domínio, esses valores sempre serão definidos. O que importa então é que o conjunto de chegada da função f é o conjunto de partida da função g.

Como exemplo, temos a função f sendo a

$code3 : VOGAIS \to 1, 2, 3, 4, 5$,

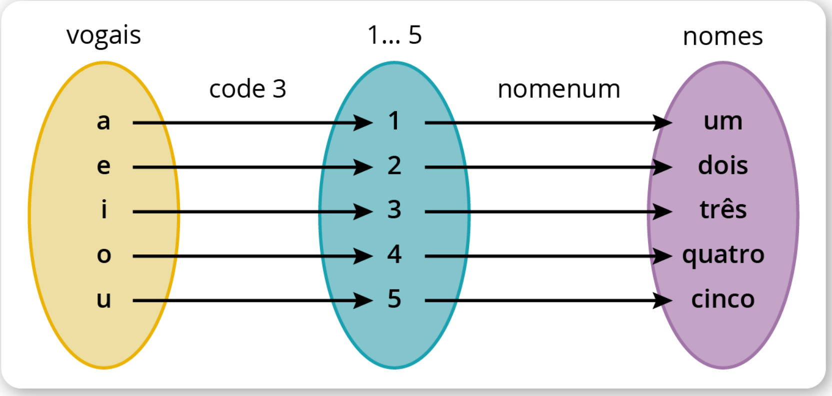
que vimos anteriormente, e a função g sendo

$nomenum : 1, 2, 3, 4, 5 \to nomes$,

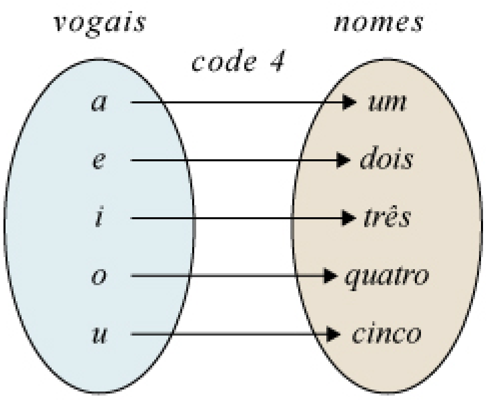
onde

$$nomes = um, dois, três, quatro, cinco,$$

mapeando os números de 1 a 5 para seus devidos nomes.



A composição de f com g é a função g o f : $code3 \to nomes$, que chamaremos $code4$.



Finalmente, podemos dizer que a função $code4$ mapeia as vogais "a", "e", "i", "o", "u" para os nomes $um, dois, três, quatro, cinco$.

Vídeo 04 - Função composta

Atividade 04

1. Considere a função $mais\_um : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, que soma 1 ao valor da entrada. Defina a equação correspondente a essa função e defina $mais\_um^{-1}$, ou seja, defina seu conjunto de partida, seu conjunto de chegada e a equação que descreve seu mapeamento.

2. Realize a composição da função $dobro\_int$ com a função $mais\_um$, onde $dobro\_int$ é a função que associa a cada número inteiro o seu dobro.

Funções Numéricas

Já que estamos falando de matemática, na maioria das vezes nossas funções serão numéricas, ou seja, seus conjuntos de partida e de chegada devem ser conjuntos numéricos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ etc.). Diversas propriedades de funções são então definidas especialmente para esse tipo de função. A primeira dessas propriedades que vamos ver aqui é a noção de *grau* de uma função, que é relacionada à representação da função por equações. Veremos também a noção de valor máximo e mínimo de uma função e como representar uma função numérica por um gráfico.

Grau de uma Função

Quando o mapeamento de uma função f é dado por um polinômio, definimos o grau da função f como sendo o grau do polinômio que define seu mapeamento. Dessa forma, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = (2x)^3 + 5x - 7$, então dizemos que o grau de f é igual a 3 ou simplesmente que f é de 3° grau.

Função de 1º Grau

Uma função de 1º grau é descrita pela fórmula $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Quando temos $b = 0$, essa função é chamada de função linear, o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade. Lembrando da nossa aula de proporção, podemos dizer que a constante de proporcionalidade na função linear é o a, enquanto a nossa entrada x servirá como o conjunto de partida para o cálculo dos valores de $f(x)$. Dessa forma, podemos dizer que a grandeza $f(x)$ é diretamente proporcional à grandeza x quando existe um número aa tal que $f(x) = ax$ para todo valor de x.

Em uma função de 1° grau, a constante b será o valor de $f(x)$ quando x for 0 (na engenharia costumamos chamar essa constante de *valor* de *offset*).

Exercício Resolvido 01

Numa corrida de taxi, o taxista cobra 10 reais pela bandeirada, mais 33 reais por quilômetro rodado. Que função usaremos pra calcular o custo de uma corrida?

Mostrar solução

$$f(x) = 3x + 10$$

onde $f(x)$ é o custo da corrida em reais, x a distância percorrida na viagem em quilômetros e 10 é o valor constante por corrida. No caso de termos percorrido 20 quilômetros, o valor da corrida será de:

$$f(x) = 3\ \cdot 20 + 10 = 70 \text{ reais}$$

Em uma equação de 1° grau, se temos o valor de $f(x)$, podemos descobrir facilmente o valor de x, se tivermos a fórmula original em mãos.

Exercício Resolvido 02

No caso da corrida de taxi, o valor da corrida no final deu 100 reais. Quantos quilômetros eu percorri?

Mostrar solução

Se $f(x) = 100$, substituindo na equação temos:

$$100 = 3x + 10$$

levando a constante pra o outro lado (subtraindo 10 em ambos os lados da equação)

$$100 - 10 = 3 \cdot x$$

Em uma equação de 1° grau, se temos o valor de $f(x)$, podemos descobrir facilmente o valor de x, se tivermos a fórmula original em mãos.

Função de 2º Grau

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se de 2° grau ou quadrática, quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em uma função de segundo grau, temos o x elevado ao quadrado (a parte quadrática da função), o x proporcional (em bx) e a constante c.

Temos uma função de 2° grau, por exemplo, ao multiplicarmos 2 funções de 1° grau:

$$(2x - 1) \cdot (3x + 2) = 6x^2 + x - 2$$

Raízes da Função

Denominamos de **raiz** (ou o **zero**) de uma função, o valor que, se atribuído a x, fará $f(x)$ ter o valor 0. No caso de uma função de 1° grau, teremos apenas um valor que satisfaz essa condição. Vejamos um exemplo no exercício resolvido a seguir:

Exercício Resolvido 03

Qual a raiz da função $f(x) = 5x + 2$?

▼ Mostrar solução

Atribuindo 0 a $f(x)$, temos

$$0 = 5x + 2$$

subtraindo 2 dos dois lados da equação, ou, como costumamos dizer, passando 2 para o outro lado, temos

$$-2 = 5x$$

dividindo ambos os lados da equação por 5, ou, mais informalmente, passando 5 para o outro lado, ficamos com

$$x = -\frac{2}{5}$$

Então, a raiz de $f(x) = 5x + 2$ é -25.

Uma função de 1º grau possui apenas uma raiz. Porém, uma função de 2º grau pode ser decomposta no produto de 2 funções de 1º grau. Dessa forma, teremos 2 raízes (ou duas raízes iguais). Essa afirmação parece ser um tanto quanto mentirosa para aqueles que não conhecem o conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$), pois já resolvemos equações de segundo grau que não obtemos raízes reais. Vamos relembrar como resolver esse tipo de equação nos próximos exercícios resolvidos.

Exercício Resolvido 04

Quais as raízes da função $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$?

Mostrar solução

Decompondo em duas funções de 1^{o} grau, teremos

$$f(x) = (x - 2) \cdot (2x + 2)$$

Para fazer o produto ser igual a 0, basta que um dos fatores seja igual a 0, então

$x = 2$ (para zerar o primeiro fator),

ou

$x = -1$ (para zerar o segundo fator).

Teremos, então, duas raízes $x_1 = 2$ e $x_2 = -1$

Nem sempre poderemos facilmente decompor uma equação de 2^{o} grau em duas de 1^{o} grau. Então, para facilitar a obtenção das raízes, utilizamos uma fórmula chamada de Fórmula de Báskara:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Onde $\Delta = b^2 - 4ac$

Exercício Resolvido 05

Quais as raízes da função $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$?

▼ Mostrar solução

Utilizando a fórmula de Báskara temos $\Delta = (-2)2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 36$, e assim:

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{36}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2+6}{4} = 2$$

e para x_2 temos:

$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{36}}{2}$$

$$x_2 = \frac{2-6}{4} = -1$$

Exercício Resolvido 06

Quais as raízes da função $g(x) = x^2 + 4$?

▼ Mostrar solução

Temos $\Delta = 02 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -16$. Porém, no cálculo de x_1 e x_2, precisamos calcular $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-16}$ que não é um número real (normalmente a gente diz que não existe raiz de número negativo, mas o mais correto a se dizer é que não existe número real que seja igual a raiz de um número negativo).

Nesse caso (e em qualquer outro que $\Delta < 0$), temos que a função não possui raízes reais.

Vídeo 05 - Exemplo

Atividade 05

1. Encontre as raízes das seguintes funções:

a. $f(x) = -3x + 5$

b. $f(x) = 4x - 7$

c. $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

d. $f(x) = 2x^2 - 0,6x + 3,6$ (aproximada)

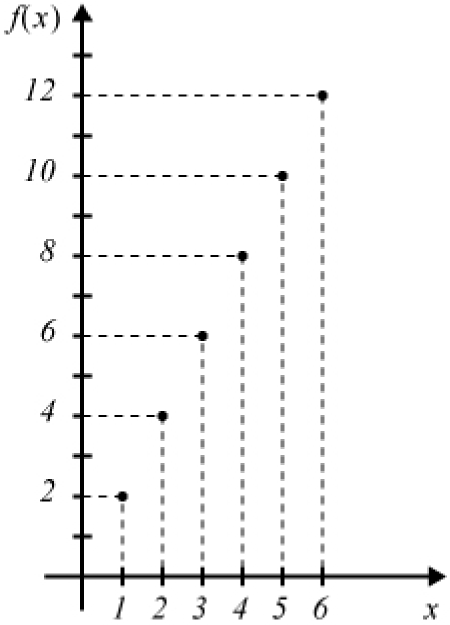
Gráficos de Funções

Como dissemos no início desta aula, uma função pode ser descrita por uma enumeração, por uma equação ou por um gráfico. Já vimos aqui vários exemplos das duas primeiras. Veremos agora essa última. Um gráfico é uma boa maneira de visualizar o comportamento de uma função. Um simples gráfico de funções é feito atribuindo vários valores à entrada de dados x e observando sua saída $f(x)$. Então, utilizando um plano cartesiano em que o valor de x é representado no eixo horizontal (chamado de eixo das **abscissas**), e o valor de $f(x)$ é representado no eixo vertical (chamado de eixo das **ordenadas**), podemos observar como a função se comporta.

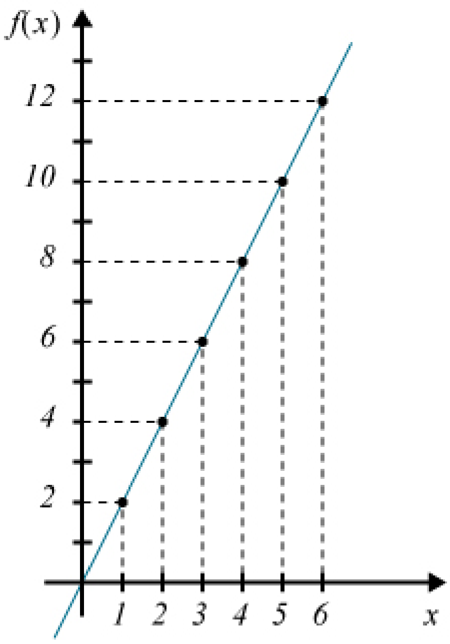
Vejamos um exemplo: Tome a função $f(x) = 2x$. Agora, vamos fazer x tomar os valores $1, 2, 3...$ até 6. Para cada valor, calcularemos $f(x)$, obtendo a seguinte tabela:

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	6	8	10	12

Então, basta utilizarmos esta tabela com as coordenadas dos nossos pontos no plano cartesiano:

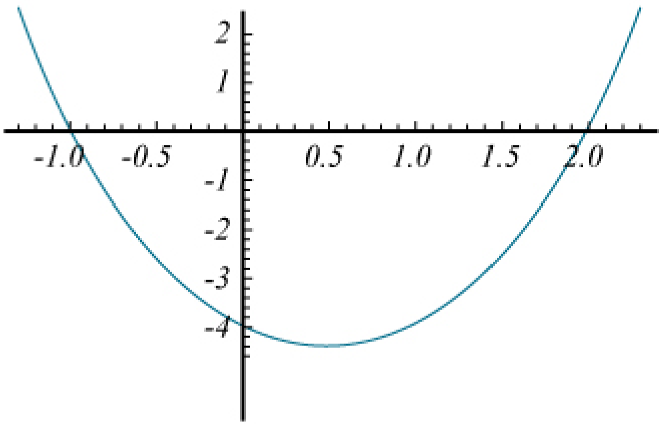


Como $f(x)$ é uma função de primeiro grau, podemos ligar esses pontos e estender a reta em seus dois extremos, obtendo a representação dessa função para qualquer valor de x:



Se você verificar, vai ver que funções de primeiro grau serão sempre retas. Perceba também que a reta só irá tocar o eixo x em um ponto, e esse ponto será a raiz (ou zero) da função (quando $f(x) = 0$).

Em uma função de segundo grau, teremos um traçado típico chamado **parábola**. O exemplo a seguir corresponde a uma função cujas raízes são distintas (a função f que usamos no exemplo resolvido 4):



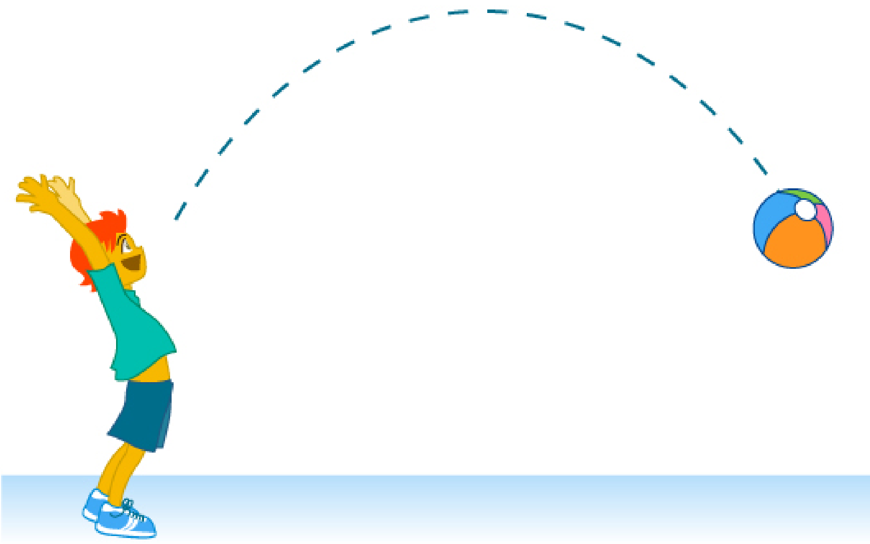
Perceba que a parábola toca o eixo x em dois pontos (-1 e 2) que são as raízes da função. Se ela tocasse em apenas um ponto (caso de $f(x) = x^2$), teríamos raízes idênticas ($x_1 = x_2 = 0$).

Atividade 06

1. Desenhe o gráfico da função $f(x) = x^2$ e o gráfico da função $f(x) = -x^2$.

Ponto Máximo e Ponto Mínimo

É comum que em funções de segundo grau e em funções de graus superiores ao segundo (terceiro, quarto, etc.) encontremos pontos máximos ou pontos mínimos. Esses pontos podem ser chamados de extremos da função, pois são onde a função assume o seu maior (ou menor) valor e o seu comportamento muda: se $f(x)$ estava aumentando com o aumento de x, passa a diminuir, ou vice-versa. Um exemplo típico é quando lançamos um objeto no ar, como podemos ver na ilustração abaixo, quando o garoto arremessa sua bola.



Olhando para o percurso da bola, vemos que ela subiu até atingir uma altura máxima (ponto máximo) e em seguida caiu. Esse movimento de Pixelota (ou de uma bola normal) é bem estudado pela Física e chamado de movimento em parábola. Podemos descrever esse movimento através de funções de 2° grau

Esse conceito se estende para funções bem mais complexas, e existem extensos estudos e técnicas matemáticas e computacionais para se determinar o ponto máximo ou mínimo de uma função, úteis principalmente na otimização de sistemas. Saber onde fica esse ponto crítico é importante, por exemplo, nos estudos de balística (saber exatamente a altura máxima de um míssil e onde irá cair), de construções (saber até que ponto máximo de envergamento a estrutura de um prédio irá aguentar em caso de terremoto), de produção (saber qual a quantidade mínima de matéria prima usada para se obter o máximo de produção) etc.

Vídeo 06 - Exemplo

Leitura Complementar

Usando o wolfram alpha para saber muito mais

Um site interessante para estudar as funções a fundo é o http://www.wolframalpha.com. Teste por exemplo, digitar a função $f(x) = x^2 + 6 * x + 9$ que corresponde à $f(x) = x^2 + 6x + 9$. Entre outras informações, ele mostrará o mínimo ou máximo da sua função.

O site também mostrará gráficos de qualquer função até em 3 dimensões (tente $f(x, y) = sinc(x) + sinc(y)$). Eu passei um bom tempo criando funções malucas só para ver os gráficos, espero que você se divirta também.

Resumo

Nesta aula, vimos um pouquinho do grande assunto que são as funções. Vimos também como definir uma função, algumas classificações e algumas manipulações que podemos realizar sobre elas, como calcular suas raízes. Função é uma ferramenta matemática muito importante, em especial para modelagem de comportamento de sistemas físicos ou de software. Como dissemos anteriormente, vimos aqui apenas uma pequena parte de tudo o que se pode fazer com funções. Não deixe de procurar saber mais quando a oportunidade se apresentar, ok?

Autoavaliação

1. Considere a função $f : 1, 2, 3, 4, 5 \rightarrow ALFABETO$, onde $ALFABETO$ é o conjunto das letras do alfabeto $ALFABETO = a, b, c, \ldots, x, y, z$, que associa cada número do conjunto de partida a sua inicial.
    a. Descreva o mapeamento da função usando um diagrama.
    b. Classifique a função quanto à injetividade, à sobrejetividade e à bijetividade.

c. Ela possui uma função inversa? Se possui, defina essa função inversa.

2. Considere a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, cujo mapeamento é descrito pela equação $f(x) = 3x - 9$.

a. Calcule a raiz dessa função.

b. Descreva o mapeamento da função usando um gráfico.

c. Classifique a função quanto à injetividade, à sobrejetividade e à bijetividade.

d. Ela possui uma função inversa? Se possui, defina essa função inversa.

3. Qual a equação que descreve a composição da função $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, cujo mapeamento é descrito pela equação $g(x) = x + 1$ com a função f do exercício anterior? Qual o domínio e a imagem dessa função composta?

4. Considere que José possui hoje uma dívida de 300 reais sem juros e que ele paga 10 reais por mês.

a. Escreva uma função que representa a evolução da dívida de José com o tempo t medido em meses e considerando que o mês atual corresponde a $t = 0$.

b. Calcule a raiz da função para determinar quando José terminará de pagar a sua dívida.

c. Se já faz 3 anos que ele vem pagando essa dívida dessa maneira constante, qual era a dívida inicial de José há 3 anos atrás?

5. Calcule as raízes da função de 2^{o} grau $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$. Essa função possui um ponto mínimo ou um ponto máximo? Dica: através das raízes da função e do ponto onde o gráfico corta o eixo y, esboce o gráfico da parábola para responder se $f(x)$ possui valor de máximo ou mínimo. Sabendo que esse ponto de máximo ou mínimo tem coordenadas $(-\frac{b}{2a}; -\frac{\triangle}{2a})$, calcule-o.

Referências

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar – Vol. 1 - Conjuntos – Funções**. Editora Atual.

LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004. v 3.

STEWART, James. **Cálculo 4**. ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002. v 1.