Matemática Aplicada

Aula 07 - Lógica Proposicional

Apresentação

Nas próximas duas aulas, você irá estudar um pouquinho de Lógica, uma ciência que nasceu na Grécia Antiga e que influenciou diversas áreas como a Psicologia, a Matemática e a Computação. Nesta aula, veremos alguns princípios básicos da Lógica Proposicional ou Booleana: o conceito de proposição, de valor verdade de uma proposição, conectivos, como formalizar uma afirmação em português através da expressão correspondente da lógica booleana e, finalmente, como raciocinar sobre essas proposições, chegando a uma conclusão sobre a veracidade de afirmações complexas a partir da informação sobre a veracidade das proposições simples que a compõem.

Vídeo 01 - Apresentação

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- Compreender como lidamos com a lógica no dia a dia.
- Identificar os operadores lógicos booleanos mais comuns e suas equivalências.
- Aplicar operações da lógica booleana para resolver problemas práticos.

Que tal dar uma de Sherlock Holmes?

Sherlock Holmes foi chamado para resolver um enigma em um hospital psiquiátrico: Zé, um enfermeiro do hospital, estava passando muito mal. Sherlock Holmes precisava descobrir se Zé havia sido envenenado e com que veneno, pois se um antídoto fosse administrado sem que Zé tivesse o veneno correspondente no sangue, o próprio antídoto poderia ser fatal. No entanto, as únicas testemunhas do potencial envenenamento de Zé eram cinco pacientes do hospital e havia uma particularidade na enfermidade desses pacientes: alguns só diziam a verdade e outros só diziam mentiras. Ele reuniu os 5 pacientes e obteve deles as seguintes afirmações:

1. Paciente (1): Zé foi envenenado com X
2. Paciente (2): Zé não foi envenenado com X.
3. Paciente (3): Zé foi envenenado com Y.
4. Paciente (4): Zé não foi envenenado com X e ele não foi envenenado com Y.
5. Paciente (5): (4) é mentiroso ou (3) fala a verdade.

Sherlock pensou e viu que precisava de mais informação. Continuou conversando com os pacientes até que o paciente (1) disse:

Paciente (1): (5) é mentiroso ou (3) fala a verdade.

Nesse momento Sherlock usou sua famosa expressão “Elementar, meu caro Watson!”.

Será que você também resolveu o problema? Se sim, responda: Zé foi envenenado? Se sim, com o veneno X, com o veneno Y ou com os 2 venenos?

Lógica

O estudo da Lógica pode ser dividido em três períodos: o *Aristotélico*, dominado pela Teoria do Silogismo (Do Dicionário Aurélio, silogismo: "Dedução formal tal que, postas duas proposições, chamadas premissas, delas, por inferência, se tira uma terceira, chamada conclusão".); o *Booleano*, marcado pela Lógica Booleana (A lógica Booleana recebeu esse nome em homenagem a seu criador, George Boole, matemático e filósofo Britânico estudioso da teoria dos Conjuntos e da Lógica Proposicional.), com regras e operações formais de cálculo proposicional; e o *período atual*, no qual surgiram as Lógicas Não Clássicas, que juntamente com a Lógica Booleana, têm forte contribuição para a Ciência da Computação. Outra divisão importante da Lógica é a distinção entre *Lógica Filosófica* e *Lógica Matemática*. A Lógica Matemática, da qual veremos aqui uma pequena parte, é uma ferramenta importante de formalização do raciocínio.

Mais especificamente, o foco principal desta aula será a Lógica Booleana (que, por comodidade, também chamaremos de Álgebra Booleana). A Álgebra Booleana (Dependendo do contexto, nomes bastante diferentes são usados para o conjunto de conceitos da Lógica Booleana (Álgebra de Boole ou Booleana, Lógica ou Cálculo Proposicional). Para a necessidade do conteúdo desta disciplina, não faremos distinção entre eles.) é uma álgebra binária, pois se aplica a variáveis que podem assumir apenas dois valores distintos, permitindo avaliar uma proposição lógica como verdadeira ou falsa. Essa lógica será discutida devido à importância que tem para a programação de computadores.

Lógica Booleana

Certamente você já ouviu falar em Lógica. Quando queremos afirmar algo que julgamos ser óbvio, dizemos que nossa afirmação é lógica utilizando frases como “é lógico que vou me sair bem nesta disciplina, pois sou inteligente e dedicado”. Sem ao menos percebermos, fazemos referência a regras de dedução da Lógica, concluindo que o sucesso na disciplina decorrerá de inteligência e dedicação.

Quando você desenvolve um raciocínio, isto é, quando faz alguma argumentação, você geralmente utiliza a linguagem natural (no caso, português), seja na forma falada ou escrita. Por exemplo, ao simular o raciocínio de Sherlock Holmes no problema do envenenamento do enfermeiro Zé, você pode pensar se o paciente (1) é dos que sempre fala a verdade, então Zé foi envenenado com o veneno X. Daí, podemos concluir que o paciente (2) é mentiroso, pois ele diz exatamente o contrário do paciente (1). E o que mais podemos concluir? Com essa hipótese de que o paciente (1) sempre fala a verdade, podemos concluir que (5) é mentiroso? (1) diz que “(5) é mentiroso ou (3) fala a verdade”. O que exatamente significa essa afirmação? Mais uma vez, quando os problemas começam a ficar um pouco mais complicados, a ajuda de uma ferramenta matemática adequada se faz necessária para não nos atrapalharmos. Essa ferramenta é justamente a Lógica Matemática, uma linguagem com um conjunto de regras e operações bem definidas, viabilizando a análise apropriada das afirmações e permitindo gerenciar as argumentações de forma rigorosa.

Segundo o Dicionário Aurélio, a palavra lógica possui vários significados, dentre os quais destacamos o seguinte, considerando a Lógica Matemática:

> Conjunto de estudos tendentes a expressar em linguagem matemática as estruturas e operações do pensamento, deduzindo-as de número reduzido de axiomas, com a intenção de criar uma linguagem rigorosa, adequada ao pensamento científico tal como o concebe a tradição empírico-positivista.

Então, vamos começar a conhecer melhor essa ferramenta. A base da Lógica Proposicional ou Booleana são as afirmações que podemos fazer sobre o mundo real ou algum mundo imaginário. Na Lógica, essas afirmações são chamadas de **proposições**.

Proposições são frases declarativas (afirmações) que possuem um valor, verdadeiro ou falso. Para você entender melhor o que é uma proposição, considere a frase “1 mais 1 é igual a 10, ou simbolicamente, 1

+ 1 = 10”. Essa frase é uma proposição no sentido de que ela afirma ou nega um fato e pode ser classificada como verdadeira (V) ou falsa (F). Nesse caso, se a operação de soma se desenvolve sobre números do sistema decimal, a proposição anterior seria falsa. Aliás, lembrando das aulas anteriores, em que sistema de numeração essa afirmação seria verdadeira?

Outro exemplo é dado pela afirmação “5 é menor que 9”, uma proposição verdadeira. Como terceiro exemplo, temos a sentença “João gosta de Maria”, cujo valor será verdadeiro ou falso, dependendo da interpretação de quem é João, quem é Maria, e do significado de gostar.

Conforme você poderá notar no decorrer desta aula, normalmente as proposições são representadas por letras minúsculas (p, q, r, etc.), chamadas de **variáveis proposicionais**. Assim, a proposição “João gosta de Maria” pode ser representada simplesmente como p. Esse tipo de representação facilita o trabalho com operações lógicas, que veremos a seguir, porque evita a repetição de todo o texto da proposição. Além do mais, como veremos adiante, muitas vezes queremos falar e pensar de uma maneira geral sobre alguma propriedade de um operador lógico e, nesse caso, a letra representa uma proposição qualquer. É a mesma coisa que fazemos quando queremos dizer, por exemplo, que a adição numérica é comutativa e escrevemos $x + y = y + x$. Ou seja, dizemos que quaisquer que sejam os valores que estamos adicionando, tanto faz qual vem primeiro e qual vem depois.

Atividade 01

Você entendeu o que é uma proposição? Como exercício, indique outras proposições que aparecem naturalmente no seu dia a dia. Classifique cada uma delas como verdadeira ou falsa. Caso sinta necessidade, pesquise um pouco na internet ou em livros que tratam deste assunto.

Operadores booleanos

É possível juntar algumas proposições para formar proposições mais complexas, também chamadas de expressões booleanas. Para isso, utilizaremos **operadores booleanos ou lógicos**, também chamados de **conectivos**. Voltando ao problema do envenenamento do enfermeiro Zé, podemos ver que a afirmação original feita pelo paciente (1)

Zé foi envenenado com X.

E a afirmação do paciente (3)

Zé foi envenenado com Y.

São afirmações simples, que chamamos também de **proposições atômicas**, pois não podem ser dividas em proposições menores. No entanto, as outras afirmações são compostas de afirmações simples através de conectivos lógicos. Consideremos como exemplo a segunda afirmação do paciente (1),

(5) é mentiroso **ou** (3) fala a verdade.

é composta de duas afirmações simples

(5) é mentiroso

e

(3) fala a verdade,

colocadas em uma afirmação única pelo uso da palavra "*ou*". Se essa afirmação composta é verdadeira ou falsa vai depender da veracidade de cada uma das afirmações atômicas e do significado do conectivo "*ou*". No caso, sabemos que quando dizemos "*ou*" em português, basta que uma das afirmações seja verdadeira para que a afirmação com o "*ou*" também seja, não? E se as duas forem verdadeiras, o cara está falando a verdade ou está mentindo? Qual é a sua opinião, nesse caso? Lembre-se de que a vida do enfermeiro Zé depende de conseguirmos decifrar corretamente a verdade desse conjunto de informações não muito confiáveis (mas vamos chegar lá, pode ficar tranquilo).

Os operadores booleanos podem ser unários ou binários. Um operador booleano **unário** é aquele aplicado sobre apenas uma proposição, caso do operador da negação que será explicado adiante. Já um operador **binário** é aquele aplicado sobre dois elementos ou proposições, caso dos demais operadores que serão explicados nesta aula.

Negação

A operação de negação indica que uma proposição não ocorre ou não é verdade. Existem várias maneiras de negar uma afirmação em português, porém a mais comum é através do uso da palavra não (e, em inglês (É comum encontrar os termos em inglês nos livros de lógica e, principalmente em linguagens de programação.), *not*). Por exemplo, observe a afirmação do paciente (2) no problema do enfermeiro Zé:

Zé não foi envenenado com X.

Ela diz o contrário (ou seja, a negação) da afirmação original do paciente (1). Podemos reescrevê-la como

Não é verdade que Zé foi envenenado com o veneno X.

Nesse caso, nossa proposição atômica é

Zé foi envenenado com X

que vamos chamar de p. O paciente (2) está então dizendo que não é verdade que p. Mas como estamos falando de matemática, é normal existir um símbolo que represente esse “não é verdade que”. Esse símbolo, que representa a operação de negação, pode variar de um livro para outro, mas aqui utilizaremos o “~”. A representação da afirmação do paciente (2) se escreve então como:

$$\sim p.$$

Veja outro exemplo. Dada a proposição p correspondente à afirmação

2 é um número par,

como negar a proposição p? A negação de p, denominada $\sim p$, corresponde a

2 NÃO é um número par.

Observe que a proposição p é verdadeira e a sua negação $\sim p$ é falsa. Aliás, sempre que uma proposição for verdadeira, sua negação será falsa. Analogamente, se uma proposição for falsa, sua negação será verdadeira.

A partir dos valores lógicos das proposições, podemos montar uma tabela, conhecida como tabela-verdade. Uma tabela-verdade relaciona todos os possíveis valores das proposições aos resultados correspondentes à aplicação de um operador às mesmas. Observe a tabela-verdade da negação:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Quadro 1 – Tabela-verdade do operador de negação

Uma vez que uma proposição só pode assumir dois valores, verdadeiro ou falso, então, a tabela-verdade da negação só vai possuir duas linhas.

Vídeo 02 - Circuitos Elétricos

Conjunção: E

Se liga

Dado que a negação de uma proposição verdadeira é uma proposição falsa, e a negação de uma proposição falsa é uma proposição verdadeira, a proposição resultante da negação da negação de uma proposição verdadeira será verdadeira. Da mesma maneira, a negação da negação de uma proposição falsa resultará em uma proposição falsa. Essa observação corresponde a uma propriedade importante da negação:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

onde $\equiv$ deve ser lido "*é equivalente a*". Seu significado é que: para qualquer que seja a proposição p, a proposição $\sim(\sim p)$ será a própria proposição (A noção de equivalência vale a para qualquer número de variáveis proposicionais e quer dizer que, para qualquer que seja a combinação de valores entre as variáveis proposicionais, os valores das proposições resultantes de ambos os lados da equivalência serão iguais: sempre que uma das expressões resultar em verdade a outra também resultará em verdade e vice-versa.) p.

Atividade 02

1. Dadas as seguintes proposições, o que significa cada expressão a seguir?

   p: gosto de jogar bola.

   q: não gosto de chocolate.

   r: gosto de não viajar.

   a. $\sim p$

b. $\sim q$

c. $\sim r$

Conjunção E

A operação da **conjunção** indica que ambas as proposições correspondentes aos operandos têm que ser verdadeiras para que o resultado da operação booleana também o seja. Em português, a maneira mais comum de juntar duas proposições através de uma conjunção é a palavra "e" (em inglês, *and*). Por causa disso, a conjunção é mais conhecida simplesmente como o *e* de duas proposições. É o que acontece na afirmação do paciente (4) do problema do enfermeiro Zé.

Zé não foi envenenado com X e ele não foi envenenado com Y.

Nessa afirmação, temos uma conjunção entre as proposições

(a) Zé não foi envenenado com X

e

(b) ele (Zé) não foi envenenado com Y.

Então, para que o paciente (4) esteja falando a verdade, é necessário que as duas proposições (a) e (b) sejam verdadeiras. Se qualquer uma delas for falsa, ele mentiu. Esse exemplo mostra uma situação em que a conjunção une duas proposições que não são atômicas, pois há uma negação em cada uma delas. Vamos continuar aqui com um exemplo mais simples e, depois, voltaremos ao caso do envenenamento.

Tomemos como novo exemplo as proposições

João gosta de Maria

e

Julieta gosta de Romeu.

A partir dessas proposições, podemos obter a proposição

João gosta de Maria *e* Julieta gosta de Romeu.

Na Lógica Booleana, o símbolo usado para indicar esse conectivo é o "∧" e a representação dessa conjunção, se chamarmos "João gosta de Maria" de p e "Julieta gosta de Romeu" de q é

$$p \wedge q$$

E se quisermos afirmar que João gosta de Maria e Julieta não gosta de Romeu? É suficiente lembrar-se dos operadores de negação e conjunção e, em seguida, aplicá-los nas proposições, resultando na expressão

$$p \wedge (\sim q)$$

Atividade 03

E a afirmação do paciente (4), como ficaria? Essa é para você responder. Use p e q para representar as proposições atômicas correspondentes.

Lembrando que uma conjunção só será verdade quando ambas as proposições forem verdade, vejamos agora a tabela-verdade do operador de conjunção:

	p	q	$p \wedge q$
A ⇒	V	V	V
B ⇒	V	F	F
C ⇒	F	V	F
D ⇒	F	F	F

Quadro 2 - Tabela-verdade do operador de conjunção

Propriedades da Conjunção

Como devemos interpretar uma tabela-verdade? Como aqui temos 2 proposições sendo combinadas com um conectivo, fica mais claro do que no caso da negação, onde só havia uma proposição. Cada uma das linhas da tabela corresponde a uma situação diferente, ou uma combinação diferente de valores lógicos para as proposições que estão sendo combinadas (no caso da Tabela 2, p e q). A linha A da Tabela 2, por exemplo, representa a situação em que ambas as proposições p e q são verdadeiras. Por sua vez, cada coluna corresponde aos valores de uma proposição (atômica ou composta). Todas as combinações de valores para as proposições atômicas precisam estar presentes (uma em cada linha) e, para cada uma delas, o valor na coluna correspondente à operação define o valor resultado dessa operação para a combinação de valores daquela linha. A **Tabela 2** nos diz então que $p \wedge q$ é verdade quando p é verdade e q é verdade e apenas nesse caso.

Propriedades úteis da conjunção:

- **comutatividade:** $(p \wedge q) = (q \wedge p)$;
- **associatividade:** $(p \wedge (q \wedge r)) = ((p \wedge q) \wedge r)$;
- **elemento neutro:**V (verdade) é o elemento neutro da conjunção, pois $p \wedge V \equiv p$.

Construindo uma tabela-verdade - primeira parte

Conforme observamos na Tabela 2, se uma expressão contém dois termos (duas proposições), o número de linhas que expressam as possíveis combinações de valores (V ou F) será quatro (2^2):

- um caso em que ambas as proposições são verdadeiras (linha A);
- dois casos em que apenas uma das proposições é verdadeira (linhas B e C);
- um caso em que ambas as proposições são falsas (linha D).

Se a fórmula possuir três proposições, serão necessárias oito linhas (2^3) para expressar as possíveis combinações de valores das proposições:

- um caso em que todas as proposições são verdadeiras;
- três casos em que apenas duas proposições são verdadeiras;
- três casos em que apenas uma das proposições é verdadeira;
- um caso no qual todas as proposições são falsas.

Podemos generalizar esse cálculo e concluir que o número de linhas distintas de uma tabela-verdade é dado por 2^n, onde n é o número de proposições lógicas. Por exemplo, no caso da negação, em que temos apenas uma proposição, a tabela-verdade possui 2^1 linhas, ou seja, 2 linhas. Da mesma forma, na conjunção, que atua com duas proposições, a tabela-verdade possui 2^2 linhas, ou seja, 4 linhas.

Para preencher uma tabela-verdade com n proposições, você deve seguir ocupando as colunas, da esquerda para a direita, de cima para baixo, com grupos de $2^n/2^i$ valores verdadeiros (V) seguidos de grupos de $2^n/2^i$ valores falsos (F), para cada i-ésima (A i-ésima coluna de uma tabela corresponde à sua coluna de número i, ou seja, a coluna de posição. Essa terminologia também se aplica às linhas de uma tabela, de forma que a i-ésima linha é a linha de posição i.) coluna. Observe que i varia de 1 até n, ou seja, o número de colunas é igual ao número de proposições. Segue um exemplo de como preencher uma tabela-verdade para três proposições.

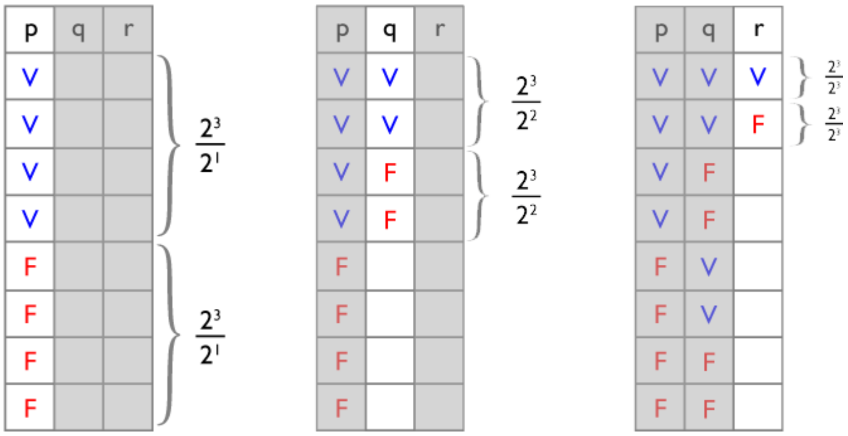

Figura 1

A i-ésima coluna de uma tabela corresponde à sua coluna de número i, ou seja, a coluna de posição . Essa terminologia também se aplica às linhas de uma tabela, de forma que a i-ésima linha é a linha de posição i.

Atividade 04

Dadas as seguintes proposições, transforme as frases seguintes em expressões booleanas.

p: Fui a Natal

q: Não fui ao cinema.

r: Fui a Mossoró.

s: Fui à praia.

t: Choveu.

(a) Fui a Natal e fui à praia.

(b) Fui a Mossoró e não choveu.

(c) Não fui a Natal e fui à praia.

(d) Não fui a Mossoró e não fui ao cinema.

Vídeo 03 - Atividade 04

Disjunção: *OU*

A operação de **disjunção** indica que pelo menos uma das proposições tem de ser verdadeira para que o resultado da operação booleana também o seja. Em português, a maneira mais comum de juntar duas proposições através de uma disjunção é a palavra "*ou*" (em inglês, or). Por causa disso, a disjunção é mais conhecida simplesmente como o *ou* de duas proposições. É o que acontece na afirmação do paciente (5) do problema do enfermeiro Zé:

(4) é mentiroso *ou* (3) fala a verdade.

Nessa afirmação temos uma disjunção entre as proposições

r: (4) é mentiroso

ou

s: (3) fala a verdade.

Então, para que o paciente (5) esteja falando a verdade, é necessário que pelo menos uma das duas proposições r e s sejam verdadeiras. Apenas no caso das 2 serem falsas ele mentiu.

Na Lógica Booleana, o símbolo usado para indicar esse conectivo é o $\vee$ e a representação dessa disjunção, com r e s representando as proposições respectivas como indicadas anteriormente é:

$$r \vee s$$

Propriedades da Disjunção

Se liga!

Será que ambas r e s nesse problema devem mesmo ser tratadas como proposições atômicas? Imagine também se tivéssemos no nosso problema uma afirmação t dizendo que (4) fala a verdade. Isso seria a negação de r e só uma das duas pode ser verdade. Se ambas são tratadas como proposições atômicas, essa informação é perdida, pelo menos de imediato. É possível resolver o problema de outro jeito, mas nesse caso, é melhor escolher uma das propriedades "falar a verdade" ou "ser mentiroso" como sendo a base para nossas proposições atômicas e a outra como a negação da primeira. Se escolhermos falar a verdade como nossa referência e dissermos que r' corresponde a (4) fala a verdade, como fica nossa disjunção?

Lembrando que uma disjunção somente vai ser falsa quando ambas as proposições forem falsas, vejamos a tabela-verdade da disjunção:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Quadro 3 - Tabela-verdade do operador de disjunção

Propriedades úteis da disjunção:

- **comutatividade:** $(p \vee q) = (q \vee p)$;
- **associatividade:** $(p \vee (q \vee r)) = ((p \vee q) \vee r)$;
- **elemento neutro:** F (falso) é o elemento neutro da disjunção, pois $p \vee F \equiv p$.

Construindo uma tabela-verdade - segunda parte

Na primeira parte da explicação sobre como construir uma tabela-verdade, vimos como construir as colunas da tabela-verdade correspondentes as *entradas* do problema, que são as proposições atômicas cujos valores vão definir o valor da saída, que é o valor da expressão booleana que queremos calcular. Agora o que precisa ser feito é criar uma nova coluna para cada subexpressão da expressão original de maneira a construirmos a tabela-verdade para a expressão completa passo a passo. Iremos mostrar como através de um exemplo. Vamos montar a tabela-verdade para a expressão $(p \vee q) \wedge r$. No primeiro quadro nós já construímos a parte correspondente às combinações dos valores de p, q e r. Repetiremos o resultado a seguir. Agora precisamos de uma coluna para a subexpressão $p \vee q$ e mais uma para a expressão completa, ou seja, a conjunção de $p \vee q$ com r. A tabela a ser preenchida fica então assim:

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$

Figura 2

Agora, é só lembrar da definição de cada operador (no caso do nosso exemplo, a disjunção e a conjunção) e preencher linha por linha o valor do resultado de cada subexpressão em função dos valores de p, q e r. Por exemplo, as casas correspondentes à expressão $p \vee q$ nas linhas onde p e q são falsos será preenchida com o valor falso.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

Figura 3 - Passo 1: Preencher os valores de p, q e r.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
V	V	V	V	
V	V	F	V	
V	F	V	V	
V	F	F	V	
F	V	V	V	
F	V	F	V	
F	F	V	F	
F	F	F	F	

Figura 4 - Passo 2: Preencher os valores do primeiro operador da expressão.

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Figura 5 - Passo 3: Preencher os valores da expressão final.

Vídeo 04 - Construção de Tabelas de verdade

Atividade 05

Considere as seguintes proposições:

p: Fui a Natal.

q: Não fui ao cinema.

r: Fui à praia.

s: Choveu.

Sabendo que a expressão $(p \vee q) \vee (r \vee \ s)$ não é verdadeira, o que podemos afirmar?

Sugestão: construir a tabela verdade da expressão.

Resolução de problemas

Vídeo 05 - Dedução de forma proposicional

Finalmente, vamos ver como podemos resolver o problema do envenenamento do enfermeiro Zé de uma maneira formal. Inicialmente, vamos nos focar apenas nas afirmações que falam diretamente sobre o envenenamento do enfermeiro. Como vimos anteriormente, podemos considerar duas proposições atômicas nesse caso, que representamos como p e q:

p: O enfermeiro Zé foi envenenado com X.

e

q : O enfermeiro Zé foi envenenado com Y

Nossa tabela-verdade então será formada por 4 linhas, correspondendo às situações em que Zé foi envenenado com os 2 venenos (p e q verdades), apenas com X (p verdade e q falso), apenas com Y (q verdade e p falso) e, Zé não foi envenenado (p e q falsos)

As expressões correspondentes às afirmações dos pacientes são formalizadas como:

- afirmação original do paciente (1): p
- afirmação do paciente (2): $\sim p$
- afirmação do paciente (3): q
- afirmação do paciente (4): $\sim p \wedge \sim q$

São essas as expressões para as quais precisamos da tabela-verdade. p e q já estão, pois são as proposições atômicas. Precisamos então de uma coluna para $\sim p$, uma para $\sim q$ e uma para a conjunção de $\sim p$ e

$\sim q$. A tabela fica assim:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Figura 6

Mas isso não basta para resolvermos o problema, pois não sabemos quem fala a verdade. Vamos agora completar a tabela com essa parte da informação. Chamemos de v_i a proposição que diz que o paciente i fala a verdade. Temos então que v_1 é equivalente a p (seta tracejada), pois o paciente fala a verdade se p é verdade e mente caso contrário. E seguindo o mesmo raciocínio:

- v_2 é equivalente a $\sim p$;
- v_3 é equivalente a q;
- v_4 é equivalente a $\sim p \wedge \sim q$;
- v_5 é equivalente a $\sim v_4 \vee v_3$; e;

por causa da segunda afirmação do paciente (1), v_1 é equivalente a $\sim v_5 \vee v_3$.

Completando a tabela-verdade com todas essas colunas, teremos:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

V_1	V_2	V_3	V_4	$\sim V_4$	$V_5 = (\sim V_4 \vee V_3)$	$\sim V_5$	$V_1 = (\sim V_5 \vee V_3)$	
V	F	V	F	V	V	F	V	*Ok*
V	F	F	F	V	V	F	F	x
F	V	V	F	V	V	F	V	x
F	V	F	V	F	F	V	V	x

Figura 7

Mas como sabemos que cada paciente SEMPRE fala a verdade ou SEMPRE mente, v_1 tem que ser igualmente verdade ou mentira se analisada a partir da primeira ou da segunda afirmação do paciente (1) (vemos a comparação com as setas contínuas). Observando a tabela-verdade, vemos que somente na situação em que p e q são verdades, a coluna correspondente às duas afirmações do paciente (1) possuem o mesmo valor e esse valor é V (verdade) (círculos verdes e laranjas). Podemos então concluir que Zé foi envenenado com ambos os venenos, o que era o mais importante. Zé já pode receber os antídotos necessários. Além disso, podemos saber quem falou a verdade e quem mentiu: o paciente (1) fala a verdade. E os outros?

O Zé finalmente está curado e mandou um agradecimento especial pra você! Mais um caso solucionado!

Elementar meu caro Watson!

Vídeo 06 - Exemplo

Leitura complementar

Quem foi George Boole? Descubra acessando a seguinte página:

RIZZATO, Fernanda Buhrer; RINALDI, Bárbara Leister. **Imática**: a matemática interativa na internet. Disponível em: http://www.ime.usp.br/~leo/imatica/historia/boole.html. Acesso em: 16 set. 2011.

No documento a seguir, você encontrará informações focadas na Álgebra de Boole:

CAJUEIRO, João Paulo Cerquinho. **Álgebra de Boole**. Disponível em: http://www2.ee.ufpe.br/joaopaulo/tecnicas/algebra.pdf. Acesso em: 16 set. 2011.

Quer mais informações sobre o desenvolvimento histórico da Lógica? Acesse a seguinte página:

FONTES, Carlos. **Breve história da lógica**. Disponível em: http://afilosofia.no.sapo.pt/Hist.htm. Acesso em: 16 set. 2011.

Resumo

Nesta aula, você aprendeu mais sobre a Lógica Booleana. Você viu que ela tem como principal característica oferecer uma estrutura que permite formalizar o processo de argumentação, permitindo avaliar proposições booleanas com mais rigor que possível com a linguagem natural. Você viu também os principais operadores booleanos, como estes podem ser pensados em termos de conjuntos, e ainda que existem diversas equivalências lógicas que podem ser utilizadas para simplificar a expressão relativa a um problema, gerando expressões equivalentes que podem ser mais fáceis de entender, facilitando sua compreensão.

Autoavaliação

1. O elemento neutro de um operador é um operando que não afeta ou influencia no resultado final da operação. Qual o elemento neutro do OU? Qual o elemento neutro do E?

2. O elemento absorvente de um operador é um operando suficiente para determinar o resultado final da operação, independente do valor do outro operando. Qual o elemento absorvente do OU? Qual o elemento absorvente do E?

3. Dadas as seguintes proposições:

    - p : o livro é interessante.
    - q : o livro é caro.
    - r : o livro é de Matemática.

    Escreva os significados correspondentes às expressões booleanas a seguir:

    a. $\sim p$

    b. $q \vee r$

    c. $p \wedge q$

    d. $p \vee r$

4. Dadas as proposições a seguir, traduza as alternativas seguintes em expressões booleanas.

p : Maria é médica.

q : Eduardo é engenheiro.

r : João é jornalista.

s : Carla é cozinheira.

a. Maria não é médica.

b. Carla é cozinheira e Eduardo não é engenheiro.

c. João não é jornalista ou Maria é médica.

d. Ou Maria não é médica ou Carla não é cozinheira.

5. Sabendo que $p = V$, $q = V$ e $r = F$, dê o valor lógico das expressões booleanas a seguir.

Dica: construa suas tabelas-verdade e identifique a linha que corresponde a esses valores das proposições.

a. $\sim (p \ \wedge q)$

b. $\sim (\sim p \vee \sim r)$

c. $q \vee (r \wedge \sim p)$

6. Seu melhor amigo está em dúvida: ou ele casa ou ele compra uma bicicleta. Veja as proposições seguintes, as quais representam as duas possibilidades:

p : seu amigo vai casar.

q : seu amigo vai comprar uma bicicleta.

Mostre a expressão booleana que representa a situação de seu amigo.

Referências

ABE, Jair Minoro; SCALZITTI, Alexandre; SILVA FILHO, João Inácio da. **Introdução à lógica para a ciência da computação**. 2. ed. São Paulo: Arte e Ciência, 2002.

AUBYN, António St. et al. **Lógica matemática**.

BEDREGAL, Benjamín René Callejas; ACIÓLY, Benedito Melo. **Lógica para a ciência da computação**. 2002. Versão preliminar.

NOVO DICIONÁRIO ELETRÔNICO AURÉLIO. **Lógica**: verbete. Versão 5.0.