# Matemática Aplicada

## Aula 05 - Matrizes – parte 2

# Apresentação

Nesta aula, continuaremos o nosso estudo sobre matrizes. Nela, nos concentraremos em matrizes quadradas. Iremos aprender alguns conceitos como o determinante de uma matriz, cofatores, o que é e como calcular uma matriz adjunta e uma matriz inversa.

**Vídeo 01** - Apresentação

## Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- Calcular o determinante de uma matriz de qualquer ordem.
- Calcular uma matriz adjunta e através dela obter uma matriz inversa.
- Conhecer as propriedades do determinante e da matriz inversa.

# Conhecimentos Prévios Necessários (Pré-requisitos)

**Somatórios** e **produtórios** são operadores matemáticos que nos permitem representar, respectivamente, somas e produtos de vários elementos. O somatório é representado pela letra grega sigma ($\sum$):

$$\sum_{i=m}^{n} X_i = x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_{n-1} + x_n$$

Onde vemos que o índice $i$ de $x_i$ irá tomar os valores de $m$ a $n$ dentro do somatório. Se quiséssemos somar, por exemplo, os 8 primeiros números, faríamos:

$$\sum_{i=m}^{8} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

Já o produtório é representado pela letra grega pi ($\pi$):

$$\prod_{i=m}^{n} X_i = x_m \cdot x_{m+1} \cdot x_{m+2} \cdot \quad \cdots \quad \cdot x_{n-1} \cdot x_n$$

Onde vemos que o índice $i$ de $x_i$ irá tomar os valores de $m$ a $n$ dentro do produtório. Então, se quiséssemos multiplicar os $5$ primeiros números, faríamos:

$$\prod_{i=m}^{5} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

## Determinante de uma Matriz

Você já ouviu falar em determinante de uma matriz? Determinantes são definidos para matrizes quadradas. O determinante de uma matriz quadrada é um número associado aos elementos dessa matriz. Nesta aula, você verá que o cálculo do determinante é importante para definirmos se uma matriz tem inversa. Determinantes também podem ser usados no cálculo da área de um paralelogramo e do volume de um paralelepípedo, a partir da associação entre os elementos que compõem as matrizes e os vértices que definem essas figuras geométricas. Além disso, o determinante é importante para resolução de sistemas de equações, porém esse assunto foge do escopo da nossa disciplina. Se você tiver curiosidade, pode pesquisar sobre a *Regra de Cramer*.

## Determinantes de Matrizes de Primeira Ordem

No caso de uma matriz de primeira ordem, seu determinante corresponde a seu único elemento. Assim, se $A_{1\times 1} = [a_{11}]$, então, $\det(A) = a_{11}$.

# Determinantes de Matrizes de Segunda Ordem

Dada uma matriz $A$ de segunda ordem:

$$A_{(2\times 2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Definimos seu determinante $\det(A)$ como **a diferença entre o produto dos termos de sua diagonal principal pelo produto dos termos de sua diagonal secundária**:

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Por exemplo,

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 3 \cdot 2 - 7 \cdot (-1) = 6 + 7 = 13$$

Em alguns casos, por simplicidade, denotamos o cálculo do determinante somente escrevendo a matriz entre duas barras verticais. Ou seja, no exemplo anterior, ao invés de escrever $\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)$, escreveríamos $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ para indicar que estamos calculando o determinante da matriz em questão.

## Determinantes de Matrizes de Terceira Ordem

No caso de uma matriz de terceira ordem, utilizamos a Regra de Sarrus (O matemático Pierre Frédéric Sarrus foi professor da Universidade de Strasbourg (França) e membro da Academia de Ciências de Paris. Ele desenvolveu vários tratados, entre os quais a solução de equações numéricas de múltiplas variáveis e integrais múltiplas, além do cálculo de determinantes para matrizes de terceira ordem, que leva seu nome.) (lê-se sarrí) para calcular o determinante:

$$A_{(3\times 3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) \\ - (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}) \end{aligned}$$

Para evitar termos que memorizar esse cálculo, descreveremos essa regra de uma maneira alternativa. Dada a matriz A anterior, inicialmente repetiremos as duas primeiras colunas de $A$, após sua terceira coluna, para obter uma matriz $A'$ com $3$ linhas e $5$ colunas:

$$A'_{(3\times 3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

Em seguida, fazemos como se fossem $3$ matrizes $3 \times 3$: $A'$ com as $3$ primeiras colunas, $A'_2$com as colunas de $2$ a $4$ e $A'_3$ com as colunas $3$ a $5$. Calculamos então $s_1$, a soma dos produtos dos elementos de cada diagonal principal (que atravessa a matriz do canto superior esquerdo para o canto inferior direito) e $s_2$, a soma dos produtos dos elementos de cada diagonal secundária (que atravessa a matriz do canto superior direito para o canto inferior esquerdo), conforme ilustrado a seguir:

$$A'_{(3\times5)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$s_1 = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32})$$

$$s_2 = (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$$

O determinante de $A$, $\det(A)$, será dado pela diferença entre $s_1$ e $s_2$:

$$\det(A) = s_1 - s_2 = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) \\ - (a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31})$$

## Exemplo 1

Dada a matriz de terceira ordem, qual seu determinante?

$$A(3 \times 3) = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

**Solução**

Pela regra de Sarrus, inicialmente formamos uma nova matriz $A'_{(3\times5)}$:

$$A'(3 \times 5) = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 8 & 0 & 5 & 8 \\ 9 & 2 & 1 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$

Então, calculamos a soma dos produtos $s_1$, do canto superior esquerdo para o canto inferior direito:

$$s_1 = 3 \cdot 8 \cdot 1 + 7 \cdot 0 \cdot 9 + 6 \cdot 5 \cdot 2 = 24 + 0 + 60 = 84$$

e a soma dos produtos $s_2$, do canto superior direito para o canto inferior esquerdo:

$$s_2 = 7 \cdot 5 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 2 + 6 \cdot 8 \cdot 9 = 35 + 0 + 432 = 467$$

Portanto,

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = 84 - 467 = -383$$

## Determinantes de Matrizes de Ordem Qualquer

Determinantes de matrizes de ordem maiores que três são calculados utilizando métodos que decompõem a matriz original em matrizes de ordens menores para as quais os determinantes podem ser calculados com maior facilidade. Um método bastante conhecido é o **Teorema de Laplace**, um procedimento de decomposição que pode ser aplicado a qualquer matriz $A_{m \times n}$. O procedimento descrito pelo Teorema de Laplace utiliza o conceito de cofator. **O cofator** de um elemento $a_{ij}$, $cof(a_{ij})$, é dado por:

$$cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

onde $A_{ij}$ é a matriz obtida quando eliminamos a $i$-ésima linha e a $j$-ésima coluna de $A$. Como exemplo de cálculo de cofatores, considere a seguinte matriz:

$$A_{(4 \times 4)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

e seus cofatores

$$cof(a_{12}) = (-1)^{1+2} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right) \text{ e}$$

$$cof(a_{22}) = (-1)^{2+2} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right)$$

Como $A_{ij}$ é uma matriz de ordem $n-1$, podemos calcular $\det(A_{ij})$ aplicando-se o Teorema de Laplace repetidamente até chegarmos a um determinante que possa ser calculado por um procedimento simples. Parece complicado, mas com um pouco de prática você vai tirar de letra esses cálculos.

**Vídeo 02** - Cofator de matrizes

## Exemplo 2

Qual o valor do cofator $cof(a_{13})$ da matriz a seguir?

$$A_{(4\times 4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 3 & 7 & 23 & 6 \\ 5 & 8 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

**Solução**

De acordo com o que discutimos anteriormente, temos que:

$$cof(a_{13}) = (-1)^{1+3} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Sabemos do Exemplo 1 que

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -383$$

Dessa forma, podemos afirmar que:

$$cof(a_{13}) = (-1)^{1+3} \cdot (-383) = (-1)^4 \cdot (-383) = \\ 1 \cdot (-383) = -383$$

Portanto, $cof(a_{13}) = -383$.

Agora que você já sabe como calcular o cofator de um elemento de matriz, vamos explicar como aplicar o Teorema de Laplace, que vai nos permitir calcular o determinante de matrizes quadradas de qualquer ordem. Inicialmente, devemos escolher uma linha ou coluna da matriz original. O determinante será dado pela soma dos produtos de cada um dos elementos da linha ou coluna escolhida por seu respectivo cofator. Assim, para uma matriz de quarta ordem, o cálculo do determinante, a partir da primeira linha, será dado pela seguinte expressão:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\right) = \\ a_{11} \cdot cof(a_{11}) + a_{12} \cdot cof(a_{12}) + a_{13} \cdot cof(a_{13}) + a_{14} \cdot cof(a_{14})$$

Portanto, o problema de calcular o determinante de uma matriz de quarta ordem se reduz ao cálculo de quatro determinantes de matrizes de terceira ordem (um para cada cofator). Observe que quanto mais elementos nulos existirem na linha ou coluna escolhida, menor o número de cofatores que teremos que efetivamente calcular. Generalizando, para uma matriz quadrada de ordem $n$ e considerando o cálculo com base em sua primeira linha, o determinante será dado pela seguinte expressão:

$$\sum_{j=1}^{n} = (a_{ij} \cdot cof(a_{ij}))$$

**Vídeo 03** - Teorema de Laplace

# Exemplo 3

Qual o determinante da seguinte matriz?

$$A_{(4\times4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 3 & 7 & 23 & 6 \\ 5 & 8 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

**Solução**

Como a matriz apresentada é de quarta ordem, calcularemos seu determinante utilizando o Teorema de Laplace. Escolheremos a primeira linha da matriz como base para o cálculo do determinante (pois, dentre todas as linhas e colunas, é a que possui mais zeros). Dessa forma, temos que

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 3 & 7 & 23 & 6 \\ 5 & 8 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}\right) = a_{11} \cdot cof(a_{11}) + a_{12} \cdot cof(a_{12}) + a_{13} \cdot cof(a_{13}) + a_{14} \cdot cof(a_{14})$$

$$= 0 \cdot cof(a_{11}) + 0 \cdot cof(a_{12}) + 20 \cdot cof(a_{13}) + 0 \cdot cof(a_{14})$$

Note que a escolha da primeira linha simplifica nosso cálculo, já que o valor do determinante dependerá apenas do cofator $cof(a_{13})$,uma vez que os demais cofatores podem ser ignorados, pois seus valores serão multiplicados por zero. Então, fique sempre ligado na linha ou coluna que tenha o maior número de zeros para diminuir o seu trabalho!

Do Exemplo 2, sabemos que $cof(a_{13}) = -383$. Dessa forma, temos que:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 3 & 7 & 23 & 6 \\ 5 & 8 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot cof(a_{11}) + 0 \cdot cof(a_{12}) +$$
$$20 \cdot cof(a_{13}) + 0 \cdot cof(a_{14})$$
$$= 0 + 0 + 20 \cdot cof(a_{13}) + 0$$
$$= 20 \cdot (-383)$$
$$= -7660$$
$$\text{portanto, } \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 \\ 3 & 7 & 23 & 6 \\ 5 & 8 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}\right) = -7660$$

## Propriedades de um Determinante

A seguir, mostramos algumas propriedades de determinantes para matrizes quadradas de ordem $n \geq 2$:

- Dada uma matriz identidade $I_n$, $\det(I_n) = 1$.
- Se uma linha ou coluna de $A$ é composta de zeros, então, $\det(A) = 0$.
- Se duas linhas ou colunas de $A$ são iguais, então, $\det(A) = 0$.
- Se uma matriz quadrada de ordem $n$ possui duas linhas (ou colunas) $m$ e $l$, tais que uma é múltipla da outra, ou seja, $a_{mj} = k \cdot a_{li}, j \in 1 \cdot \cdot n (a_{im} = k \cdot a_{il}, i \in l \cdot \cdot n)$ então, $\det(A) = 0$.
- Dada uma matriz $A$, seu determinante é igual ao de sua transposta: $\det(A) = \det(A^T)$.

- Se $A$ é uma matriz triangular superior ou inferior de ordem $n$, então,

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- Se ao multiplicar uma linha ou coluna de $A$ por um número $k$, obtemos $B$, então, $\det(B) = k \cdot \det(A)$.

- Se $B = k \cdot A$ para algum número $k$, então, $\det(B) = kn \cdot \det(A)$, sendo $n$ a ordem da matriz $A$.

- Se $A$ e $B$ são matrizes quadradas da mesma ordem, então, $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

- Se ao permutarmos duas linhas ou colunas de $A$, obtemos $B$, $\det(B) = -\det(A)$.

Essas propriedades são importantes porque nos permitem simplificar o cálculo de determinantes.

**Vídeo 04** - Propriedades dos determinantes

## Atividade 01

1. Para testar seus conhecimentos, calcule os determinantes das seguintes matrizes:

   a. $\begin{bmatrix} 45 \end{bmatrix}$

   b. $\begin{bmatrix} 54 & 12 \\ 70 & 21 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

## Matriz de Cofatores e Matriz Adjunta

Dada uma matriz quadrada $A_{m \times n}$, sua **matriz adjunta**, denotada por $adj(A)$, é a transposta da **matriz de cofatores** de $A$, $cof(A)$:

$$adj(A) = (cof(A))^T$$

$$\text{onde } cof\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} cof(a_{11}) & cof(a_{12}) & \cdots & c \\ cof(a_{21}) & cof(a_{22}) & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ cof(a_{m1}) & cof(a_{m2}) & \cdots & c \end{bmatrix}$$

## Exemplo 4

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ qual matriz corresponde à $adj(A)$?

**Solução**

Primeiro, devemos calcular a matriz de cofatores:

$$adj(A) = (cof(A))^T$$

$$cof\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix} (-1)^{1+1} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{1+2} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{1+3} \cdot \mathrm{de} \\ (-1)^{2+1} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{2+2} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{2+3} \cdot \mathrm{de} \\ (-1)^{3+1} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{3+2} \cdot \det\left(\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\right) & (-1)^{3+3} \cdot \mathrm{de} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (8 \cdot 1 - 2 \cdot 0) & 1 \cdot (5 \cdot 1 - 9 \cdot 0) & 1 \cdot (5 \cdot 2 - 9 \cdot 8) \\ -1 \cdot (7 \cdot 1 - 2 \cdot 6) & 1 \cdot (3 \cdot 1 - 9 \cdot 6) & -1 \cdot (3 \cdot 2 - 9 \cdot 7) \\ 1 \cdot (7 \cdot 0 - 8 \cdot 6) & -1 \cdot (3 \cdot 0 - 5 \cdot 6) & 1 \cdot (3 \cdot 8 - 5 \cdot 7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -5 & -62 \\ 5 & -51 & 57 \\ -48 & 30 & -11 \end{bmatrix}$$

Em seguida, calculamos $adj(A)$ transpondo $cof(A)$:

## Atividade 02

**1.** Dada a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 7 & 3 & 6 \\ 8 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, quanto vale $adj(A)$?

**Vídeo 05** - Atividade 02

# Inversa de uma Matriz

**Vídeo 06** - Divisão de Matrizes

Dada uma matriz quadrada $A_{m \times m}$, sua inversa $A^{-1}_{m \times m}$ é uma matriz tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_m$. Para que uma matriz $A$ seja invertível, seu determinante $\det(A)$ deve ser diferente de zero. Dada uma matriz $A$ tal que $\det(A) \neq 0$ , sua inversa $A^{-1}$ é dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adj(A)$$

**Vídeo 07** - Exemplo

## Exemplo 5

Qual a matriz inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$?

**Solução**

Essa matriz foi apresentada como exemplo quando apresentamos o cálculo dos determinantes e das matrizes adjuntas. Vimos que:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = -383 \text{ e}$$

$$adj\left(\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8 & 5 & -48 \\ -5 & -51 & 30 \\ -62 & 57 & -11 \end{bmatrix}$$

portanto

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{383}\right) \cdot \begin{bmatrix} 8 & 5 & -48 \\ -5 & -51 & 30 \\ -62 & 57 & -11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{8}{383} & -\frac{5}{383} & \frac{48}{383} \\ \frac{5}{383} & \frac{51}{383} & -\frac{30}{383} \\ \frac{62}{383} & \frac{57}{383} & \frac{11}{383} \end{bmatrix}$$

Podemos verificar a propriedade da inversa mostrando que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_m$

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{8}{383} & -\frac{5}{383} & \frac{48}{383} \\ \frac{5}{383} & \frac{51}{383} & -\frac{30}{383} \\ \frac{62}{383} & \frac{57}{383} & \frac{11}{383} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 \cdot \left(-\frac{8}{383}\right) + 7 \cdot \left(\frac{5}{383}\right) + 6 \cdot \left(\frac{62}{383}\right) & 3 \cdot \left(-\frac{5}{383}\right) + 7 \cdot \left(\frac{51}{383}\right) + 6 \cdot (- \\ 5 \cdot \left(-\frac{8}{383}\right) + 8 \cdot \left(\frac{5}{383}\right) + 0 \cdot \left(\frac{62}{383}\right) & 5 \cdot \left(-\frac{5}{383}\right) + 8 \cdot \left(\frac{51}{383}\right) + 0 \cdot (- \\ 9 \cdot \left(-\frac{8}{383}\right) + 2 \cdot \left(\frac{5}{383}\right) + 1 \cdot \left(\frac{62}{383}\right) & 9 \cdot \left(-\frac{5}{383}\right) + 2 \cdot \left(\frac{51}{383}\right) + 1 \cdot (- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -\frac{8}{383} & -\frac{5}{383} & \frac{48}{383} \\ \frac{5}{383} & \frac{51}{383} & -\frac{30}{383} \\ \frac{62}{383} & -\frac{57}{383} & \frac{11}{383} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{8}{383}\right) \cdot 3 + \left(-\frac{5}{383}\right) \cdot 5 + \left(\frac{78}{383}\right) \cdot 9 & \left(-\frac{8}{383}\right) \cdot 7 + \left(-\frac{5}{383}\right) \cdot 8 + \\ \left(\frac{5}{383}\right) \cdot 3 + \left(\frac{51}{383}\right) \cdot 5 + \left(\frac{48}{383}\right) \cdot 9 & \left(\frac{5}{383}\right) \cdot 7 + \left(\frac{51}{383}\right) \cdot 8 + \\ \left(\frac{62}{383}\right) \cdot 3 + \left(-\frac{57}{383}\right) \cdot 5 + \left(\frac{11}{383}\right) \cdot 9 & \left(\frac{62}{383}\right) \cdot 7 + \left(-\frac{57}{383}\right) \cdot 8 + \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, comprovamos que a inversa de $\begin{bmatrix} 3 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 0 \\ 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ é $\begin{bmatrix} -\frac{8}{383} & -\frac{5}{383} & \frac{48}{383} \\ \frac{5}{383} & \frac{51}{383} & -\frac{30}{383} \\ \frac{62}{383} & -\frac{57}{383} & \frac{11}{383} \end{bmatrix}$

**Vídeo 08** - Matriz Inversa

## Propriedades de uma Matriz Inversa

Dada uma matriz A invertível, temos as propriedades apresentadas a seguir.

- O determinante de uma matriz invertível é diferente de zero. Logo, $\det(A) \neq 0$.
- Sua matriz inversa $A^{-1}$ é única.

- Sua matriz inversa $A^{-1}$ é também invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$.

- Sua transposta $A^T$ é também invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

- O produto de sua inversa por sua transposta, $A^{-1}A^T$, é também invertível.

- Para qualquer número $k$, onde $k \neq 0$, ( $K \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$.

- Sejam $A_1, A_2, \cdots, A_n$, matrizes invertíveis. Então,

  $$(A1 \cdot A_2 \cdot \quad \cdots \quad \cdot A_{n-1} \cdot A_n)^{-1} = (A_n^{-1} \cdot A_{n-1}^{-1} \cdot \quad \cdots \quad \cdot A_2^{-1} \cdot A_1^{-1})$$

- Seja $B$ uma matriz tal que $(A \cdot B)$ é invertível.Então, $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

- Se A tem uma inversa $A^{-1}$, então, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

---

# Atividade 03

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 5 \\ 1 & 10 & 11 \end{bmatrix}$, quanto vale $A^{-1}$?

**Vídeo 09** - Criptografia

# Leitura Complementar

Para complementar seu estudo sobre as matrizes, consulte as fontes relacionadas a seguir.

- MUNDO EDUCAÇÃO. **Matrizes e determinantes**. Disponível em: http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/matriz-determinantes.htm. Acesso em: 16 set. 2011.

  Nesse site, você encontrará mais informações sobre matrizes e determinantes, além de links com várias definições e operações sobre matrizes.

- SODRE, Ulysses. Matemática Essencial: médio: matrizes. Disponível em: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/matrizes/matrizes.htm. Acesso em: 16 set. 2011.

  Essa é outra fonte em que você pode obter mais informações e aprender mais sobre as matrizes e suas operações.

# Resumo

Nesta aula, você aprendeu a representar informações de forma tabular em matrizes. Introduzimos a representação das matrizes, com isso você pôde conhecer tipos especiais de matrizes e conceitos relacionados como as diagonais, os cofatores e os determinantes. Você também viu importantes operações sobre as matrizes e suas propriedades. Esperamos que todos os objetivos propostos tenham sido alcançados.

# Autoavaliação

**1.** Seja $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2x & x \end{bmatrix}$ Se $\det(A) = 36$, quanto vale $x$?

**2.** Seja $\begin{bmatrix} x & x & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 8 & x & 0 \end{bmatrix}$ Se $\det(A) = 0$, quanto vale $x$?

**3.** Dada a matriz $A$ a seguir, calcule sua adjunta.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

**4.** Compute a inversa da matriz $A$ a seguir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

# Referências


LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004. Vol. 3.

LÜTKEPOHL, H. **Handbook of matrices**. Chichester: John Wiley & Sons, 1996.

SOARES, Joshuah de Bragança. **Dicionário de matemática**. São Paulo: Editora Hemus, 2005.