Matemática Aplicada

Aula 04 - Matrizes – parte 1

Apresentação

Nas próximas aulas vamos estudar as matrizes. Você vai ver que as matrizes oferecem uma solução simples e poderosa à representação dos dados e das relações existentes entre eles. Por exemplo, quando vemos uma tabela com as distâncias rodoviárias entre as capitais do Brasil, temos, implicitamente, uma matriz de dados.

Você vai ver também uma apresentação da notação que empregaremos para representar as matrizes e seus elementos. Em seguida, apresentaremos alguns de seus tipos especiais, como as matrizes quadradas, triangulares e identidade. Logo depois, você estudará as operações mais comumente aplicadas a elas. Embora uma matriz possa apresentar um número qualquer de dimensões, nossa discussão se concentrará sobre as de duas dimensões, as mais utilizadas.

Vídeo 01 - Apresentação

Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- Definir matrizes de diversas ordens.
- Aplicar as operações básicas sobre matrizes e conhecer suas propriedades.

Conhecimentos Prévios Necessários (Pré-requisitos)

Quando se trabalha com um grande número de variáveis, é comum distingui-las pelo uso de números para que não seja necessário o uso de muitos nomes diferentes. Assim, ao invés de chamar as variáveis de $a, b, c, d, \cdots,$ por exemplo, é comum chamá-las de $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots$ Esses números associados ao nome da variável são chamados de índices. Muitas vezes, como no caso das matrizes que veremos nesta aula, esses índices dão alguma informação posicional da variável correspondente. Por exemplo, em uma fila, podemos ter cliente_1, cliente_2 e cliente_3, dando a ideia de que há uma ordem entre os clientes na fila. Nesses casos, é comum usar algumas expressões matemáticas com índices. Por exemplo, se queremos falar de um cliente em uma posição qualquer, escrevemos cliente_i, e se queremos falar do que está duas posições atrás dele, escrevemos $\text{cliente}_{(i-2)}$. No caso das matrizes de duas dimensões, usamos dois índices, como veremos a seguir.

Matrizes

Você sabe ou lembra o que são matrizes? As matrizes são elementos matemáticos largamente utilizados na representação de dados e podem ser vistas como abstrações de tabelas, recursos com os quais estamos habituados a trabalhar cotidianamente. Para você ter uma ideia, a maioria das linguagens de programação apresenta as matrizes como uma de suas estruturas de dados mais importantes. Daremos enfoque às matrizes como um elemento matemático, mas as operações e notações aqui explicadas têm relação direta com as representações computacionais. É importante observar que, apesar de trabalharmos aqui com matrizes numéricas, ou seja, matrizes em que os valores em cada uma de suas posições são números, em linguagens de programação esse conceito é estendido para matrizes de quaisquer tipos de dados que estejam definidos na linguagem (como textos, por exemplo). No entanto, a maioria das operações e propriedades que estudaremos aqui, como, por exemplo, a soma de matrizes, só faz sentido para matrizes numéricas.

As matrizes são aplicadas à representação de variados problemas. Consideremos como exemplo uma tabela de dados com as distâncias rodoviárias e aéreas entre as capitais do Brasil. Você pode ver a seguir uma tabela reduzida, extraída da tabela completa apresentada no site http://www.goodway.com.br/distancias.htm.

CIDADES	Maceió	Manaus	Natal	Palmas	Porto Alegre	Porto Velho
Maceió	0	2.779	434	1.383	2.775	3.090
Manaus	5.491	0	2.765	1.509	3.132	761
Natal	572	5.985	0	1.527	3.172	3.179
Palmas	1.851	4.141	2.345	0	2.222	1.711
Porto Alegre	3.572	4.563	4.066	2.747	0	2.706
Porto Velho	4.505	901	4.998	1.71	3.662	0

Legenda:

Distância aérea Distância rodoviária

Essa tabela é um exemplo de matriz composta por dados simples, as distâncias entre pares de capitais, através dos quais fica fácil obter a distância rodoviária e aérea entre duas capitais quaisquer. Dizemos que uma matriz desse tipo possui duas dimensões, da mesma maneira que a tabela correspondente é chamada de tabela de duas entradas, pois relaciona dois grupos de objetos. No caso do nosso exemplo, temos na realidade o mesmo grupo de objetos (as capitais) sendo considerado nas duas dimensões (como cidades de origem e como cidades de destino).

As matrizes que veremos a seguir são abstrações de tabelas como a apresentada anteriormente. A grande diferença é que na matriz as etiquetas que identificam cada linha ou coluna são sempre números inteiros positivos, chamados índices da matriz, e esses números não são representados explicitamente. O objeto matemático correspondente à tabela anterior seria então representado como:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2.779 & 434 & 1.383 & 2.775 & 3.09 \\ 5.491 & 0 & 2.765 & 1.509 & 3.132 & 761 \\ 572 & 5.985 & 0 & 1.527 & 3.172 & 3.179 \\ 1.751 & 4.141 & 2.345 & 0 & 2.222 & 1.711 \\ 3.572 & 4.563 & 4.066 & 2.747 & 0 & 2.706 \\ 4.505 & 901 & 4.998 & 1.71 & 3.662 & 0 \end{bmatrix}$$

Definições

Uma matriz $A_{(m \times n)}$ é uma coleção de números:

$$A_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

onde m e n são números inteiros positivos que denotam o número de linhas e o número de colunas, respectivamente.

A ordem de uma matriz $A_{(m \times n)}$ é o par que representa o número de linhas (m) seguido do número de colunas (n) de A, denotado por $m \times n$.

Em uma matriz numérica, cada um dos elementos a_{ij} de A é um número, localizado na i-ésima linha e na j-ésima coluna de A, onde $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

A seguir, você verá tipos especiais de matrizes: as quadradas, triangulares e uma matriz muito especial, a identidade. O conhecimento desses tipos de matrizes será importante também quando estivermos discutindo as operações sobre elas.

Vídeo 02 - Construção de Matrizes

Matriz Quadrada

Dizemos que A é uma **matriz quadrada** ou **quadrática** quando o número de linhas dessa matriz é igual ao seu número de colunas. Diz-se que uma matriz quadrada com m linhas e m colunas tem ordem m, simplificando a representação geral de ordem de matrizes que seria m x m, nesse caso. Uma matriz quadrada tem o seguinte aspecto geral:

$$A_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Veja um exemplo de matriz quadrada de ordem 3:

$$A_{(3 \times 3)} = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 10 \\ 89 & 35 & 65 \\ 55 & 22 & 77 \end{bmatrix}$$

Em uma matriz quadrada, os elementos alinhados a partir do canto superior esquerdo até o canto inferior direito constituem sua **diagonal principal**. Na matriz exemplo mostrada anteriormente, a diagonal principal é formada pelos elementos 15, 35 e 77. No caso geral, a diagonal principal é formada pelos elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{mn}, ou seja, a_{ii}, para todo $i \in \{1, 2, 3, \cdots, m\}$. Analogamente, a **diagonal secundária** de uma matriz quadrada é formada pelos elementos alinhados a partir do canto inferior esquerdo até o canto superior direito. Nessa matriz exemplo, a diagonal secundária é dada pelos elementos 55, 35 e 10. No caso geral, a diagonal secundária é dada pelos elementos $a_{1m}, a_{2(m-1)}, \cdots, a_{m1}$, ou seja, $a_{i(m-i+1)}$, para todo $i \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$.

Diagonal Principal

$$A_{(3\times3)} = \begin{bmatrix} 15 & 12 & 10 \\ 89 & 35 & 65 \\ 55 & 22 & 77 \end{bmatrix}$$

Diagonal Principal

Matriz Triangular

Uma **matriz triangular inferior** é uma matriz quadrada em que todos os elementos **acima** de sua diagonal principal são nulos. Em outras palavras, dizemos que uma matriz quadrada é uma matriz triangular inferior quando $a_{ij} = 0$ sempre que $j > i$. A seguir, apresentamos um exemplo de matriz triangular inferior de ordem 3.

$$A_{(3\times3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 6 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Uma **matriz triangular superior** é uma matriz quadrada em que todos os elementos **abaixo** de sua diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ sempre que $j < i$. Segue-se um exemplo de matriz triangular superior.

$$A_{(3\times3)} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

Considere uma propaganda de uma companhia de televisão a cabo com 3 tipos de pacote: o pacote 1, que custa $R\$30/mês$, o pacote 2, que custa $R\$50/mês$ e o pacote 3, que custa $R\$60/mês$.

O conteúdo de cada pacote é um subconjunto próprio do conteúdo dos pacotes superiores (*conteúdo 1* $\subset$ *conteúdo 2* $\subset$ *conteúdo 3*). A matriz triangular superior a seguir poderia ser usada por um programa computacional que diria quanto o cliente deve pagar a mais, caso queira mudar de um dado pacote para um pacote superior.

$$\text{Diferença de tarifas para pacote superior} = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz, cada linha corresponde ao pacote atual do cliente e cada coluna corresponde ao pacote desejado. Note que essa matriz é triangular superior, pois $a_{21} = a_{31} = a_{a32} = 0$. Se um programa precisar calcular o que o cliente deve pagar a mais para migrar do pacote 1 para o 3, por exemplo, ele consultará a posição a_{13}, obtendo o valor 30. Como só estamos nos preocupando com a migração para pacotes superiores, podemos colocar zeros nas casas correspondentes a migrações para pacotes inferiores, pois essas casas não serão acessadas. Se fôssemos modelar o problema completo com migrações para pacotes superiores e inferiores, essa matriz não seria mais triangular (mas bem que as companhias de TV a cabo gostariam de nos fazer migrar para pacotes inferiores pagando a mesma coisa, não é?).

Se liga!

Nesse exemplo, a diagonal também é composta de zeros. Isso não é necessário para que uma matriz seja triangular superior, mas não impede que ela seja! O que você precisa verificar é se os elementos abaixo da diagonal principal são nulos para que a matriz seja triangular superior. Analogamente, verificar se os elementos acima da diagonal principal são nulos para que a matriz seja triangular inferior.

Atividade 01

1. E se a matriz do problema precisasse ser triangular superior? Como você mudaria a modelagem do problema para conseguir tal matriz?

Matriz Identidade

Chamamos de matriz identidade de ordem *m* (denotada por I_m) a matriz quadrada de ordem *m* em que todos os elementos são nulos, exceto os elementos da diagonal principal, que são iguais a 1. Quando a ordem da matriz identidade está clara, a chamamos simplesmente de matriz identidade. Em outras palavras, em uma matriz identidade, $a_{ij} = 0$ quando $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ quando $i = j$. A seguir, mostramos o aspecto geral de uma matriz identidade de ordem *m*.

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Atividade 02

1. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é conhecida como matriz nula de ordem 3.

   Essa matriz é quadrada? Triangular inferior? Triangular superior? Identidade? Justifique sua resposta.

Vídeo 03 - Atividade 02

Operações sobre Matrizes

Definiremos, agora, algumas operações sobre matrizes. As definições apresentadas anteriormente serão muito relevantes, pois certas operações só poderão ser realizadas sobre matrizes com propriedades específicas. Além disso, os termos que você acabou de conhecer serão úteis para descrever as operações.

Igualdade entre Matrizes

Sejam duas matrizes A e B de mesma ordem $m \times n$. Essas matrizes são iguais se todos os seus elementos correspondentes são iguais entre si, ou seja, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

Por exemplo, as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ são iguais, pois $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \le i \le 2$ e $1 \le j \le 2$. Por outro lado, as matrizes $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 5 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ são diferentes, pois $c_{11} \ne d_{11}$.

Soma de Matrizes

Sejam $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ duas matrizes de mesma ordem. A soma das matrizes A e B, denotada por $A + B$, resulta na matriz $C_{m \times n}$, em que cada elemento c_{ij} de C é dado pela soma dos elementos correspondentes em A e B, ou seja, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$. Dadas as matrizes:

$$A_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } B_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

A soma $C = A + B$ entre essas matrizes é:

$$C_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

A seguir, um exemplo de soma entre duas matrizes A e B.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 81 & 15 & 12 \\ 33 & 91 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 + 81 & 6 + 15 & 2 + 12 \\ 0 + 33 & 7 + 91 & 1 + 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 & 21 & 14 \\ 33 & 98 & 33 \end{bmatrix}$$

Propriedades da Adição

A seguir, apresentamos as propriedades da operação de adição de matrizes.

- **Associatividade**: dadas as matrizes A, B e C de mesma ordem, então $(A + B) + C = A + (B + C)$.

- **Comutatividade**: dadas as matrizes A e B de mesma ordem, então $A + B = B + A$.

- **Elemento neutro**: dadas as matrizes 0 e A, ambas de ordem $(m \times n)$ e em que 0 é a matriz cujos elementos são todos nulos (matriz nula), então $0 + A = A$ e $A + 0 = A$.

- **Elemento oposto**: dada uma matriz A, existe uma matriz $-A$, denominada a **oposta** de A, tal que $b_{ij} = -a_{ij}$, para todo $a_{ij} \in A$ e $b_{ij} \in -A$. Então, $A + (-A) = 0$, lembrando que esse 0 é a matriz nula, e não o número 0.

Atividade 03

1. Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

mostre que:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + B = B + A$
- $0 + A = A$
- $A + (- A) = 0$

Vídeo 04 - Atividade 03

Subtração de Matrizes

Sejam $A_{(m \times n)}$ e $B_{(m \times n)}$ matrizes com a mesma ordem, a subtração entre as matrizes A e B, denotada por $A - B$, corresponde à matriz $C_{m \times n}$ em que cada elemento c_{ij} de C é dado pela subtração dos elementos correspondentes em A e B, ou seja, $c_{ij} = a + ij - b_{ij}$, para todo $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$. Dadas as matrizes:

$$A_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } B_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

A subtração $C = A - B$ entre essas matrizes corresponde a:

$$C_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \cdots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \cdots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \cdots & a_{mn} - b_{mn} \end{bmatrix}$$

A seguir, um exemplo de subtração entre duas matrizes A e B.

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 81 & 15 & 12 \\ 33 & 91 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 81 & 6 - 15 & 2 - 12 \\ 0 - 33 & 7 - 91 & 1 - 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -78 & -9 & - \\ -33 & -84 & - \end{bmatrix}$$

Note que a subtração entre matrizes $A - B$ equivale à soma entre a matriz A e a matriz oposta de B, $-B$, como visto na definição de elemento oposto. Ou seja,

$$A - B = A + (-B).$$

Propriedades da Subtração

- **Associatividade e comutatividade**: como a subtração de duas matrizes é definida como a subtração de cada par de elementos dessas matrizes, é de se esperar que as propriedades da subtração de matrizes sejam consequência das propriedades da subtração dos números que as compõem. Como a subtração de números não é comutativa nem associativa, a subtração de matrizes também não possui essas propriedades. Mais concretamente, considere

  $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

  Como

  $$A - B = \begin{bmatrix} 1 - 2 & 2 - 1 \\ 3 - 2 & 1 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  é diferente de

$$B - A = \begin{bmatrix} 2-1 & 1-2 \\ 2-3 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

então a subtração não é comutativa, já que existem matrizes A e B tais que $A - B \neq B - A$. De maneira análoga se verifica que a subtração de matrizes não é associativa. A Atividade 04 mais abaixo traz um exercício que verifica que a diferença de matrizes não é uma operação associativa.

- **Elemento neutro**: dadas as matrizes A e 0 de mesma ordem, em que 0 é a matriz nula, então $A - 0 = A$.

Se liga!

$0 - A = 0 + (-A) = -A$. Ou seja, a matriz nula é elemento neutro apenas quando aparece como subtraendo (pois $+0$ é igual a -0).

Exemplo 2

Vamos voltar ao caso dos pacotes de TV a cabo. Imagine agora que a companhia está fazendo uma promoção para que os clientes mudem para um pacote superior e oferece um desconto durante certo período (digamos 3 meses) para quem fizer a migração. O desconto é de $R\$5/mês$ para quem for do pacote 1 para o 2, e de $R\$10/mês$ para quem fizer a migração do 1 ou do 2 para o 3. Nenhum desconto é fornecido para quem permanecer no pacote que já possui ou para quem passar para um pacote inferior. A matriz completa da diferença de custos entre os pacotes, sem a promoção, está representada a seguir.

Diferença de tarifa

$$\begin{bmatrix} 0 & 20 & 30 \\ -20 & 0 & 10 \\ -30 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

Os valores dos descontos correspondentes à promoção podem ser também registrados sob a forma de uma matriz como:

Descontos

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lembre-se: como não temos as etiquetas, é importante lembrar que cada linha corresponde ao pacote atual do cliente e cada coluna corresponde ao pacote desejado.

Agora podemos calcular a matriz correspondente à diferença de custo para o cliente nos próximos 3 meses em cada uma das migrações fazendo a subtração Diferença de *tarifas– Descontos*.

Promoção = Diferença de tarifas - Descontos =

$$\begin{bmatrix} 0 & 20 & 30 \\ -20 & 0 & 10 \\ -30 & -10 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 & 20-5 & 30-10 \\ -20-0 & 0-0 & 10-10 \\ -30-0 & -10-0 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Atividade 04

1. Dada as matrizes $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ calcule quanto vale $(A - B) - C$? E $A - (B - C)$?

Produto de um Escalar por uma Matriz

Seja $A_{m \times n}$ uma matriz e $k \in R$ um escalar (um número). O produto de k por A, denotada por $k \cdot A$, é a matriz $c_{m \times n}$ em que cada elemento c_{ij} de C é dado pelo produto do elemento correspondente de A por k, ou seja, $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Dada a seguinte matriz:

$$A_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

o produto $k \cdot A$ do escalar k pela matriz A corresponde a:

$$kA_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & \cdots & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & \cdots & k \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & \cdots & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Segue-se um exemplo do produto do escalar $k = 2,5$ por uma matriz quadrada de ordem 3.

$$2,5 \cdot \begin{bmatrix} 84 & 21 & 14 \\ 45 & 20 & 67 \\ 33 & 98 & 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 \cdot 84 & 2,5 \cdot 21 & 2,5 \cdot 14 \\ 2,5 \cdot 45 & 2,5 \cdot 20 & 2,5 \cdot 67 \\ 2,5 \cdot 33 & 2,5 \cdot 98 & 2,5 \cdot 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210 & 52,5 & \\ 112,5 & 50 & 1 \\ 82,5 & 245 & \end{bmatrix}$$

A seguir, temos as propriedades do produto de um escalar por uma matriz.

- **Multiplicação por um**: dada uma matriz A e o escalar 1, então $1 \cdot A = A$.

- **Multiplicação por zero**: dada uma matriz A e o escalar 0, então $0 \cdot A = 0$.

- **Distributividade do produto escalar em relação à soma de matrizes**: dadas as matrizes A e B de mesma ordem e um escalar qualquer k, então $k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B$.

- **Distributividade do produto escalar em relação à soma dos escalares**: dada a matriz A e quaisquer escalares p e q, então $(p + q) \cdot A = p \cdot A + q \cdot A$.

Exemplo 3

Vamos mais uma vez voltar ao caso dos pacotes de TV a cabo. Imagine agora que a companhia está fazendo uma segunda promoção para que os clientes mudem para um pacote superior e oferece um desconto durante 3 meses para quem fizer a migração, mas agora o desconto é definido sob a forma de uma porcentagem da diferença de custo. O desconto é de 60% da diferença, ou seja, O cliente terá um desconto de 60% na matriz de diferença de tarifas para pacote superior do exemplo 1. O seu desconto será de:

$$0,6 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 20 & 30 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 \cdot 0 & 0,6 \cdot 20 & 0,6 \cdot 30 \\ 0,6 \cdot 0 & 0,6 \cdot 0 & 0,6 \cdot 10 \\ 0,6 \cdot 0 & 0,6 \cdot 0 & 0,6 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Promoção 2 = Diferença de tarifas (exemplo 2) – desconto =

$$\begin{bmatrix} 0 & 20 & 30 \\ -20 & 0 & 10 \\ -30 & -10 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 12 & 18 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 & 20-12 & 30-18 \\ -20-0 & 0-0 & 10-6 \\ -30-0 & -10-0 & 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -20 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Para pensar: Por que não aplicamos a taxa de desconto à matriz Diferença de tarifas completa?

Atividade 05

1. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ sabendo

que $(-1 + k) \cdot (A + B) = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -1 \\ -3 & -5 & -5,5 \\ -1,5 & -2,5 & -2 \end{bmatrix}$ informe quanto

vale o escalar k?

Produto de Matrizes

Sejam $a_{m \times n}$ e $b_{n \times p}$ duas matrizes, **o produto de A por B, denotado por $A \cdot B$, é definido apenas quando o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B.** O produto das matrizes A e B corresponde à matriz $c_{m \times p}$ em que cada elemento c_{ij} de C é dado pela soma dos produtos de cada elemento da i-ésima linha de A pelo elemento correspondente da j-ésima coluna de B, ou seja, $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots a_{in} \cdot b_{nj}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq p$. Dadas as matrizes:

$$A_{(m \times n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ e } B_{(n \times p)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

o produto $C = A \cdot B$ entre essas matrizes corresponde a:

$$C_{(m \times p)} =$$

$$\begin{bmatrix} (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1}) & (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n2}) & \cdots \\ (a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1}) & (a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n2}) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ (a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n1}) & (a_{m1} \cdot b_{12} + a_{m2} \cdot b_{22} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n2}) & \cdots \end{bmatrix}$$

Mostramos, a seguir, exemplo de um produto entre duas matrizes.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & -4 \\ 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 2 \cdot 8 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 \\ 7 \cdot 0 + 1 \cdot 8 + (-4) \cdot 3 & 7 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + (-4) \cdot 1 \\ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 8 + (-1) \cdot 3 & 8 \cdot 2 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

Vídeo 05 - Matrizes na saúde

Se liga!

No site https://pt.khanacademy.org/math/precalculus/precalc-matrices/multiplying-matrices-by-matrices/e/multiplying_a_matrix_by_a_matrix você pode exercitar a multiplicação de matrizes com dicas para solução dos exercícios e até vídeos com ajuda no conteúdo.

A seguir, temos as propriedades do produto entre matrizes.

- **Não comutatividade**: o produto entre duas matrizes é não comutativo. Na atividade 03, ao resolver os itens a) e b) você consegue provar essa propriedade.

- **Distributividade em relação à soma**: sejam as matrizes A, B e C:

  - $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

  - $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

- **Associatividade**: sejam as matrizes A, B e C. Então $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

- **Elemento neutro**: o produto de qualquer matriz $A_{n \times m}$ pela matriz identidade I_m resulta na própria matriz $A_{n \times m}$, da mesma maneira que o produto de I_n por $A_{n \times m}$ resulta em $A_{n \times m}$.

$$I_n \cdot A_{n \times m} = A_{n \times m} \cdot I_m = A_{n \times m}$$

Portanto, uma matriz identidade funciona como o elemento neutro do produto entre duas matrizes.

Quando precisamos resolver expressões com três ou mais matrizes e operadores diferentes, é imprescindível conhecer as precedências dos operadores, o que nos indicará a ordem de cálculo das subexpressões. A seguir, apresentamos as precedências dos operadores definidos anteriormente.

1. Resolva inicialmente as operações que aparecem entre parênteses.
2. Em seguida, resolva os produtos entre matrizes e os produtos entre escalares e matrizes.
3. Por fim, resolva as adições e subtrações entre matrizes.

Atividade 06

1. Dada as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 0 & 8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e

   $C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 9 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$ quais produtos existem? Quando o produto for definido, mostre a matriz resultante. Caso contrário, explique a razão da indefinição do produto.

   Dica: sempre que possível, reutilize resultados já calculados.

   a. $A \cdot B$

   b. $B \cdot A$

   c. $A \cdot C$

   d. $A \cdot (B + C \cdot B)$

   e. $B \cdot A$

   f. $C \cdot A$

   g. $C \cdot B$

h. $(C + B \cdot A) \cdot B$

Transposta de uma Matriz

Seja $A_{m\times n}$ uma matriz, sua transposta $A^T_{m\times n}$ é a matriz em que cada elemento a_{ij} de A^T corresponde ao elemento a_{ji} de A, ou seja, $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Dada a matriz seguinte:

$$A^T_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

sua transposta A^T é definida como:

$$A^T_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Posto de maneira simples, as linhas (colunas) de uma matriz transposta correspondem às colunas (linhas) da matriz original.

Veja o exemplo seguinte:

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 0 & 5 \\ 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

A seguir, temos as propriedades da operação de transposição de uma matriz.

- Dada uma matriz A, $(A^T)^T = A$.

- A transposta do produto de um escalar k por uma matriz A é igual ao produto do escalar k pela transposta de A, ou seja, $(k \cdot A)^T = k \cdot (A^T)$.

- Dadas as matrizes A e B, a transposta da soma é a soma das transpostas: $(A + B)^T = A^T + B^T$.

- Dadas as matrizes A e B, a transposta do produto é o produto das transpostas em ordem trocada: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Vídeo 06 - Matriz Simétrica

Atividade 07

1. Dada as matrizes $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 12 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ verifique que:

a. $(A + B)^T = A^T + B^T$

b. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Você Sabia?

Para a elaboração desta aula utilizamos exemplos com matrizes pequenas de, no máximo, ordem 3 para facilitar o aprendizado. Porém, no dia a dia, os dados agrupados em matrizes costumam ter ordens bem maiores, na casa das centenas a milhares de valores (imagine, por exemplo, um sistema de controle de voo que precisa identificar exatamente a distância entre todos os aeroportos do Brasil, a velocidade de cada tipo de avião e itinerário para calcular os horários corretos de chegada e partida de cada um diariamente). Os computadores, por sua vez, têm extrema habilidade em tratar de dados que estão organizados na forma de matriz, realizando milhões de cálculos por segundo.

Quando estivermos estudando programação, veremos que as matrizes serão importantes para organizarmos nossos dados e apresentá-los de uma forma que o computador possa lidar com eles da maneira mais rápida possível para resolver nossos problemas.

Para dar um gostinho do que vem por aí, na próxima aula, veremos algumas operações que podemos realizar com as matrizes e que são fundamentais, por exemplo, para a representação, análise e transformação de imagens digitais.

Leitura Complementar

Para completar seu estudo sobre as matrizes, consulte as fontes relacionadas a seguir.

- MUNDO EDUCAÇÃO. **Matrizes e determinantes**. Disponível em: http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/matriz-determinantes.htm. Acesso em: 10 fev. 2010.

  Nesse site, você encontrará mais informações sobre matrizes e determinantes, além de links com várias definições e operações sobre matrizes.

- SODRE, Ulysses. Matemática Essencial: médio: matrizes. Disponível em: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/matrizes/matrizes.htm. Acesso em: 10 fev. 2010.

  Essa é outra fonte em que você pode obter mais informações e aprender mais sobre as matrizes e suas operações.

Resumo

Nesta aula, você aprendeu a representar informações de forma tabular em matrizes. Informamos como se faz a representação das matrizes e com isso você pôde conhecer alguns de seus tipos especiais, bem como realizar importantes operações sobre elas e suas propriedades.

Autoavaliação

Resolva as questões seguintes procurando identificar se todos os conceitos sobre as matrizes foram bem assimilados e se você consegue aplicar as operações sobre as matrizes corretamente. Se necessário, consulte as seções anteriores e verifique os exemplos apresentados. Bom trabalho!

1. Considere as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 6 & 4 & 5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} D = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule:

a. $A + B$

b. $A \cdot B$

c. $B \cdot A$

d. $A \cdot C$

e. $A \cdot B \cdot C$

f. $C^T \cdot D^T$

g. $B \cdot D^T$

h. $2 \cdot A - B$

i. $D \cdot (A + 3 \cdot B)$

2. Sejam as matrizes $A_{4 \times 3}$ e $B_{3 \times 4}$, tais que $a_{ij} = i - j$ e $b_{ij} = j - i$. Supondo $C = A \cdot B$, qual a soma dos elementos da diagonal principal de C?

3. Considere as afirmativas abaixo. Para cada afirmativa, indique se ela é verdadeira (V) ou falsa (F).

- Seja A uma matriz qualquer. Então, $(A^T)^T = A$.

- Sejam A e B duas matrizes. Então, $A \cdot B = B \cdot A$ somente quando $A = B$.
- Sejam A e B duas matrizes. Se $A \cdot B$ e $B \cdot A$ são definidas, então, A e B são matrizes quadradas e de mesma ordem.
- Seja A uma matriz quadrada de dimensão n. Então, $A \cdot I_n = I_n \cdot A$, onde I_n representa a matriz identidade de ordem n.

Referências

LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas elementares**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006a.

LÜTKEPOHL, H. **Handbook of matrices**. Chichester: John Wiley & Sons, 1996.

SOARES, Joshuah de Bragança. **Dicionário de matemática**. São Paulo: Editora Hemus, 2005.