# Matemática Aplicada

## Aula 03 - Potenciação

# Apresentação

Dando continuidade à apresentação de tópicos básicos da Matemática aplicados à solução de problemas computacionais, nesta aula você vai aprender um pouco mais sobre as potências. As potências, além de serem usadas em cálculos usuais como o cálculo de áreas (tamanho de uma superfície), são especialmente importantes quando utilizamos a notação científica para exprimir grandezas. Como veremos, a potenciação tem relação direta com operações elementares da Matemática e possui propriedades que nos permitem simplificar expressões mais complexas para melhor manipulá-las.

Nesta aula, você estudará a notação utilizada para expressar uma potência. Em seguida, conhecerá algumas potências básicas, passando então à apresentação de propriedades de potências, úteis à simplificação de expressões. As propriedades apresentadas serão resumidas em uma tabela ao final da aula, de forma a facilitar a consulta posterior.

**Vídeo 01** - Apresentação

## Objetivos

Ao final desta aula, você será capaz de:

- Definir uma potência e dominar suas propriedades básicas.
- Reescrever expressões envolvendo potências.
- Solucionar problemas práticos envolvendo potências.

# Potenciação

A **potenciação**, também conhecida como **exponenciação**, é uma operação aritmética definida sobre dois operandos: uma **base** $a$ e um **expoente** $n$. A operação de potenciação é representada por $a^n$ e o resultado dessa operação é também chamado de **potência**. A base e o expoente de uma potência podem ser quaisquer números reais.

No caso particular em que o expoente é um número inteiro positivo ( $n > 0$), $a^n$ corresponde à multiplicação de *n fatores iguais à base a*:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}}$$

## Se liga!

A partir dessa definição, decorre que $a^1 = a$. Essa propriedade nos diz que **qualquer número elevado a um é o próprio número**.

O comportamento da operação de potenciação para os outros casos de expoentes (números não inteiros, números negativos e zero) varia bastante e a intuição da multiplicação com $n$ fatores não ajuda a entendê-los. Veremos aqui apenas os expoentes inteiros.

Primeiramente, o que acontece quando o expoente $n$ é igual a zero? O que seria multiplicar a por a zero vezes? Nesse caso, foi convencionado que o resultado de $a^0$ deveria ser 1 para que algumas propriedades importantes da potenciação, que veremos a seguir, funcionassem também para o expoente zero.

$$a^0 = 1$$

E quando n é negativo? O que seria multiplicar a por a menos dez ( $-10$) vezes, por exemplo? Nesse caso também o resultado da operação é definido através de uma convenção, que define que qualquer que seja a base $a$ e qualquer que seja o expoente $n < 0$:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

E como devemos ler uma potência $a^n$? Podemos ler essa expressão de diversas maneiras:

1. $a$ elevado à potência $n$; ou
2. $a$ elevado a $n$; ou
3. $a$ elevado à $n$-ésima potência; ou
4. $a$ elevado à $n$-ésima.

Como exemplo, a potência $5^4$ pode ser lida como

1. cinco elevado à potência quatro; ou
2. cinco elevado a quatro; ou
3. cinco elevado à quarta potência, ou
4. cinco elevado à quarta.

Se $n = 2$ ou $n = 3$, temos ainda três outras formas de ler a potência:

1. $a^2$: "$a$ elevado ao quadrado", "quadrado de $a$", ou "$a$ ao quadrado";
2. $a^3$: "$a$ elevado ao cubo", ou "cubo de $a$", ou "$a$ ao cubo".

Essas duas últimas formas vêm, respectivamente, do cálculo da área de um quadrado, dada por $l \cdot l = l^2$, onde $l$ corresponde ao lado do quadrado, e ao volume de um cubo, dado por $l \cdot l \cdot l = l^3$ , onde $l$ corresponde ao comprimento, largura e altura de um cubo.

# Se liga!

Como $a^n$ corresponde à multiplicação entre si de $n$ instâncias de $a$, o que vai acontecer quando $a$ é negativo? Cada multiplicação por $a$ vai dar origem a uma troca de sinal do resultado. Para vermos isso mais concretamente, vejamos alguns exemplos com $a = -3$. Primeiramente com $n = 2$:

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$$

Ou seja, multiplicamos 3 vezes 3 e obtemos o resultado 9. Para saber o sinal do resultado, analisamos o sinal de cada um dos fatores da multiplicação ($-3$ e $-3$). Como ambos eram negativos, o resultado é positivo. Agora, vejamos com $n = 3$:

$$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-3)^2 = -27$$

Nesse caso, multiplicamos 3 vezes o resultado de $(-3)^2$, que já tínhamos calculado, o que dá 27. A análise dos sinais dos fatores ($-3$ e 9) nos diz que o resultado dessa multiplicação deve ser negativo, pois um dos fatores era negativo e outro positivo.

Um processo similar pode ser realizado para calcular $(-3)^4$:

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-3)^3 = (-3) \cdot (-27) = 81$$

Podemos observar então que $a^n$ pode ser calculado como $a \cdot a^{n-1}$. Como $a$ é negativo, obrigatoriamente o sinal de $a^n$ será então o oposto do sinal de $a^{n-1}$. Como sabemos que $a^1 = a$, logo, negativo, e que os expoentes inteiros pares e ímpares se alternam, temos que serão negativos $a^1,\ a^3,\ a^5, \cdots$, ou seja, as potências com expoentes ímpares; e positivos $a^2,\ a^4,\ a^6, \cdots$, ou seja, as potências com expoentes pares.

**Conclusão**

1. Dada uma potência de base negativa e expoente ímpar, o resultado será negativo.

2. Dada uma potência de base negativa e expoente par, o resultado será positivo.

# Atividade 01

Vamos colocar em prática o que acabamos de estudar?

Calcule o valor de cada uma das seguintes potências:

a) $5^6$ b) $3^3$ c) $(-5)^4$

d) $(-7)^3$ e) $-(4^7)$ f) $-(8^4)$

## Você sabia?

A **radiciação** é a operação inversa à potenciação. Dada uma potência $a^n = x$, a raiz de índice $n$ de $x$ produz a base $a$, isto é, $\sqrt[n]{x} = a$ e $\sqrt[n]{a^n} = a$ . Exemplos:

$$\sqrt[2]{36} = \sqrt[2]{6^2} = 6$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$$

Para um número $x$ qualquer, designamos as radiciações de índices 2 e 3 como a raiz quadrada de $x$ ($\sqrt[2]{x}$) e a raiz cúbica de $x$ ($\sqrt[3]{x}$), respectivamente. No caso da raiz quadrada, simplificamos a escrita para $\sqrt{x}$.

**Vídeo 02** - Radiciação

# Propriedade das Potências

Agora, você vai conhecer importantes propriedades da potenciação. Essas propriedades serão úteis quando estivermos resolvendo problemas que envolvem potências, nos permitindo simplificar os cálculos.

## Multiplicação de Potências de Mesma Base

Dadas duas potências $a^n$ e $a^m$, quanto vale a multiplicação $a^n.\ a^m$? Ora, pela definição, temos que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}} \text{ e } a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{m \text{ vezes}}$$

$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n+m \text{ vezes}} = a^{n+m} \cdot$ Por exemplo, $2^3 \cdot 2^2 = 8 \cdot 4 = 32 = 2^5 = 2^3$

## Se liga!

**Potências de expoente zero**

Essa propriedade é uma justificativa para a adoção da convenção $a^0 = 1$ que vimos anteriormente, pois para que $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$, o valor de $a^0$ precisa ser 1. Já a potência $0^0$ é em geral considerada como indefinida, o que é compatível com o fato que $0^0 = 0^1 \cdot 0^{-1} = 0 \cdot \left(\frac{1}{0^1}\right) = 0 \cdot \left(\frac{1}{0}\right)$, o que implicaria em uma divisão por zero. No entanto, é também possível encontrar referências que convencionam que $0^0 = 1$, como com as outras bases.

**Potências de expoente inteiro negativo**

Outra importante consequência dessa propriedade é a definição de potências de expoente negativo, que também vimos anteriormente: como para qualquer $n \in Z$, temos que $n + (-n) = 0$, então, $a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^0 = 1$. Portanto, $a^{-n}$ é o inverso de $a^n$, ou seja, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Como exemplo, considere as potências

$$(4)^{-3} = \frac{1}{(4)^3} = \frac{1}{64}$$

$$(32)^{-2} = \frac{1}{(32)^2} = \frac{1}{1024}$$

# Divisão de Potências de Mesma Base

Dadas duas potências $a^n$ e $a^m$, quanto vale a divisão $\frac{a^n}{a^m}$? Como dividir um número $x$ por um número $y$ equivale a multiplicar $x$ pelo inverso de $y$, ou seja, $\frac{x}{y} = x \cdot (\frac{1}{y})$ , podemos escrever a divisão $\frac{a^n}{a^m}$ como $a^n \cdot \frac{1}{a^m}$. Lembrando que $\frac{1}{a^m}$ equivale a $a^{-m}$, conforme discutido anteriormente, podemos reescrever a divisão como:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^{-m} = a^{n+(-m)} = a^{n-m}$$

Logo, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ . Seguem-se alguns exemplos de uso dessa equivalência:

$$\frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$$

$$\frac{10^4}{10^6} = 10^{4-6} = 10^{-2} = \frac{1}{100}$$

# Multiplicação de Potências de Mesmo Expoente

Sejam $a^n$ e $b^n$ duas potências. Quanto vale a multiplicação $a^n \cdot b^n$? Como sabemos que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}} \text{ e } b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n \text{ vezes}}$$

Então, podemos afirmar que

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n \text{ vezes}}$$

Como a multiplicação é uma operação associativa e comutativa, podemos reescrever $a^n \cdot b^n$ como:

$$a^n \cdot b^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdots (a \cdot b)}_{n \text{ vezes}}$$

Logo, $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.

## Se liga!

Note que, no caso em que $a = b$, temos ()(). Por outro lado, conforme a propriedade de multiplicação de potências de mesma base, teremos $a^n$. Assim, $(a^2)^n = a^{2n}$. Veremos mais detalhes sobre essa igualdade quando estudarmos Potências de potências.

A seguir, alguns exemplos de aplicação desta propriedade:

$$\left(2^2\right) \cdot \left(3^2\right) = (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$$

$$\left(5^3\right) \cdot \left(2^3\right) = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$$

# Divisão de Potências de Mesmo Expoente

Sejam $a^n$ e $b^n$ duas potências onde $a \neq b$ e $b \neq 0$. Quanto vale a divisão $\frac{a^n}{b^n}$? Como sabemos que:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ vezes}} \text{ e } b^n = \underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n \text{ vezes}}$$

Logo,

$$\frac{a^n}{b^n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}^{n \text{ vezes}}}{\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdots b}_{n \text{ vezes}}} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdots \left(\frac{a}{b}\right)}_{n \text{ vezes}} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Como exemplos da aplicação desta propriedade, considere as potências a seguir:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{2^4}{3^4}\right) = \frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{6}{4}\right)^3 = \left(\frac{6^3}{4^3}\right) = \frac{216}{64}$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^3 = \left(\frac{1^3}{7^3}\right) = \frac{1}{343}$$

E se o expoente da potência de base racional for um número negativo, como podemos resolver a potenciação? Com base em nossa discussão a respeito das potências de bases inteiras e expoentes inteiros negativos, resolveremos essas potências **invertendo o racional correspondente à base e trocando o sinal do expoente**, conforme mostrado nos exemplos a seguir:

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{-2} = \left(\frac{6}{5}\right)^{2} = \frac{36}{25}$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{-3} = \left(\frac{7}{2}\right)^{3} = \frac{343}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{1}\right)^{4} = \frac{16}{1}$$

## Potência de Potências

### Se Liga!

Reveja o *link* sobre o Sistema Internacional de Unidades que vimos na Aula 1 no tópico Prefixos Oficiais do SI. https://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_Internacional_de_Unidades#Prefixos_oficiais_do_SI e veja como a potenciação é usada para simplificar a escrita das grandezas.

Seja $a^n$ uma potência. Quanto valerá a nova potência de base $a^n$ e expoente $m$, denotada por $(a^n)^m$? De acordo com a definição, temos que:

$$(a^n)^m = (a^n) \cdot (a^n) \underbrace{\cdot}_{m \text{ vezes}} (a^n) \cdots (a^n)$$

$$= (a \cdot \underbrace{a}_{n \text{ vezes}} \cdots a) \cdot (a \cdot \underbrace{a}_{\underbrace{n \text{ vezes}}_{m \text{ vezes}}} \cdots a) \cdots (a \cdot \underbrace{a}_{n \text{ vezes}} \cdots a)$$

Logo, $(a^n)^m = a^{(n \cdot m)}$. A seguir, mostramos alguns exemplos desta propriedade.

$$\left(2^2\right)^3 = 2^6 = 64$$

$$\left(\left(2^3\right)^2\right)^4 = 2^{24} = 16777216$$

Perceba que as potências $(a^n)^m$ e $a^{n^m}$ são diferentes, pois na primeira potência primeiro resolvemos a potência $a^n$ para depois elevá-la à potência $m$, enquanto na segunda potência, primeiro calculamos a potência $n^m$ e, em seguida, utilizamos esse resultado como o expoente da base $a$. No exemplo a seguir, verificamos a diferença entre essas potências:

$$\left(2^3\right)^2 = 8^2 = 64 \neq 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$$

Finalizaremos a aula apresentando um resumo das propriedades da potenciação de forma que você possa relembrá-las rapidamente. Não se preocupe em decorar essas propriedades, seu principal objetivo deve ser compreender as equivalências apresentadas para que seja simples aplicá-las quando necessário. A memorização dessas propriedades ocorrerá naturalmente com a prática.

| **Propriedades** | **Expressões** |
|---|---|

**Propriedades** **Expressões**

**Tabela 1** - Propriedades da potenciação

**Vídeo 03** - Propriedades da potenciação

# Atividade 02

Aplique as propriedades da potenciação às seguintes expressões:

**a.** $2 \cdot 4 \cdot 8$

b. $\frac{3 \cdot 27}{9}$

c. $(-5)^4 \cdot 3^4$

d. $\frac{27}{8}$

e. $(-8)^3$

**Vídeo 04** - Notação Científica

**Vídeo 05** - Expoente Racional

# Leitura Complementar

Para complementar seu estudo sobre as razões, proporções e porcentagens, consulte as fontes indicadas a seguir.

- MUNDO EDUCAÇÃO. **Potenciação**. Disponível em: http://www.mundoeducacao.com.br/matematica/potenciacao.htm. Acesso em: 24 nov. 2009.

  Esse site oferece maiores informações sobre a potenciação, assunto desta aula.

- SODRE, Ulysses. Matemática Essencial: médio: funções exponenciais. Disponível em: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/medio/expolog/exponenc.htm. Acesso em: 24 nov. 2009.

  Nessa página, você encontrará informações sobre as funções exponenciais e sua conexão com a potenciação.

# Resumo

Nesta aula, você foi apresentado às potências. Você aprendeu que as potências são uma forma abreviada de escrever multiplicações quando os fatores envolvidos na multiplicação são iguais. Além de facilitar a escrita de expressões, tornando-as mais concisas, as propriedades que aprendemos a respeito das potências são úteis porque nos permitem escrever expressões para versões simplificadas. Esperamos que você tenha atingido os objetivos traçados no início da aula, o que poderá ser verificado na autoavaliação. Caso tenha dificuldades, volte ao conteúdo e reveja os conceitos que forem necessários.

# Autoavaliação

1. Quais as propriedades básicas da potenciação? Para cada propriedade, mostre um exemplo de aplicação.

2. Reescreva as expressões seguintes como potências de bases inteiras:

    a. $1$

    b. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

    c. $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4$

    d. $(3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3 \cdot 3)$

    e. $(7 \cdot 7 \cdot 7)^5$

    f. $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 10$

    g. $10 \cdot (\frac{1}{9}) \cdot (\frac{1}{9}) \cdot 8 \cdot 8 \cdot (\frac{1}{7}) \cdot (\frac{1}{7}) \cdot (\frac{1}{7})$

    h. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

    i. $-(8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8)$

    j. $\frac{5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5}$

    <u>**Mostrar respostas**</u>

3. Para cada um dos itens abaixo, quanto vale o expoente x?

    a. $23^x = 1$

    b. $2^x = 64$

    c. $3^x = 81$

    d. $125^x = 25$

    e. $(\frac{1}{6})^x = 216$

    f. $(\frac{5}{7})^x = \frac{125}{343}$

g. $(\frac{4}{7})^x = \frac{49}{16}$

h. $5 \cdot (\frac{2}{3})^x = \frac{20}{9}$

i. $(\frac{7}{9})^{2x} = \frac{343}{729}$

j. $(\frac{7}{9})^{2x} = \frac{49}{81}$

k. $3^x = 7^x$

l. $4^{3x+1} = 64$

m. $4^{5x+10} = 8$

n. $7^{x-9} = (\frac{1}{49})^x$

o. $11^{2x-10} - 121 = 0$

p. $9^x - 3 \cdot (3^{3x+1}) = 0$

q. $7^{x+1} - 3 \cdot 7^x = 2^{5+x} + 17 \cdot 2^x$

r. $3^x - 3^{4-x} = 24$

s. $2^x \cdot 3^x \cdot 5^x = \frac{1}{900}$

Mostrar respostas

**4.** Para cada um dos itens abaixo, quanto vale a base b? Nesse exercício a dica geral é isolar a potência com base b e depois escrever a potência com base numérica com o mesmo expoente da potência de base b. Os dois primeiros exercícios terão a solução nas dicas se você errar o resultado.

a. $b^2 = 4^3$

b. $2^3 \cdot b^3 = 27$

c. $b^{-2} = 25$

d. $b^5 = \frac{1}{\sqrt[5]{5^{25}}}$

e. $(b^2)^3 = 729$

f. $b^{2^3} = 256$

g. $b^4 \cdot b^6 = 1024$

h. $\frac{4^3}{b^3} = 27 = \frac{x}{y}$

i. $\frac{2^3}{b^{-4}} = 128$

j. $\frac{b^2}{b^5} = 125$

Mostrar respostas

## Resposta da Questão 2

**a.** $1^1$

**b.** $2^5$

**c.** $2^6$

**d.** $3^5$

**e.** $7^{15}$

**f.** $2^8 \cdot 5^2$

**g.** $2^5 \cdot 3^{-4} \cdot 5^1 \cdot 7^{-3}$

**h.** $2^{-3} \cdot 3^{-3}$

**i.** $-2^{12}$

**j.** $5^{-1}$

## Resposta da Questão 3

**a.** 0

**b.** $6$

**c.** $4$

**d.** $\frac{2}{3}$

**e.** $-3$

**f.** $-3$

**g.** $-2$

**h.** $2$

**i.** $\frac{3}{2}$ ou $1,5$

**j.** $1$

**k.** $0$

**l.** $\frac{2}{3}$

**m.** $-1,7$ ou $\frac{-17}{10}$

**n.** $3$

**o.** $6$

**p.** $-2$

**q.** $2$

**r.** $3$

**s.** $-2$

## Resposta da Questão 4

**a.** $8$

**b.** $1,5$ ou $\frac{3}{2}$

**c.** $0,2$ ou $\frac{1}{5}$

**d.** 0, 2 ou $\frac{1}{5}$

**e.** 3

**f.** 2

**g.** 2

**h.** $\frac{4}{3}$

**i.** 2

**j.** 0, 2 ou $\frac{1}{5}$

# Referências


LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas elementares**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006a.

______. **A Matemática do Ensino Médio**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006b. v 1.