Matemática Aplicada

Aula 01 - Razões e Proporções

Apresentação

Muitas vezes, sem nem mesmo perceber, você usa os conceitos de razão e proporção em situações do seu dia a dia. No entanto, na atividade de programação precisamos não somente saber resolver um problema, como também saber "explicar" para o computador como ele pode resolver problemas similares. Nessa hora, é necessário dominar os conceitos lógicos e matemáticos utilizados na resolução e não apenas resolver o problema de maneira intuitiva.

Pensando nisso, nesta aula vamos estudar os conceitos e aplicações das razões e das proporções. Começaremos a aula apresentando as razões, que são quocientes entre dois números. Em seguida, definiremos as proporções como igualdades entre duas razões. Tanto as razões como as proporções têm aplicação frequente em situações cotidianas, sendo as porcentagens um exemplo de uso dos mais comuns. Seja bem-vindo!

Vídeo 01 - Apresentação

Objetivos

Após a leitura desta aula, você deverá ser capaz de:

- Definir razões e proporções matematicamente.
- Identificar a aplicação desses conceitos nas atividades do dia a dia.
- Entender as porcentagens como um caso particular de razão.
- Representar situações reais sob a forma de razões, proporções e porcentagens.

Conhecimentos prévios necessários (pré-requisitos)

Grandezas e unidades de medida

Entendemos por grandeza tudo aquilo que pode ser medido ou contado. Existem diferentes tipos de grandezas como distância, temperatura, tempo, volume, etc. Para cada uma dessas grandezas existe frequentemente mais de uma forma de expressar uma medida. Nos Estados Unidos medem-se distâncias com as unidades pés, jardas e milhas, e temperaturas em graus Fahrenheit (ºF). Já aqui no Brasil, comprimentos são normalmente medidos em centímetros, metros ou quilômetros; a temperatura é dada em graus Celsius (ºC); o tempo é marcado com base em segundos, minutos, horas etc. Essas unidades de medida que utilizamos fazem parte de um conjunto padronizado usado em quase todo o mundo chamado de Sistema internacional de Unidades (Você pode saber mais sobre o Sistema Internacional de Unidades na Wikipédia, através do seguinte link:).

Divisão

Existem duas maneiras de realizar uma divisão e para que possamos ter uma melhor visualização desses "tipos" de divisões vamos considerar duas situações distintas.

Situação 1

Três amigos se juntam para jogar dominó. Sabendo que um jogo completo de dominó possui 28 peças, não seria possível dividir por igual a quantidade de peças. Cada um deles ficaria com 9 peças e sobraria uma. A peça do dominó que restou não poderia ser quebrada entre os três amigos para que cada um tivesse a mesma quantidade de peças.

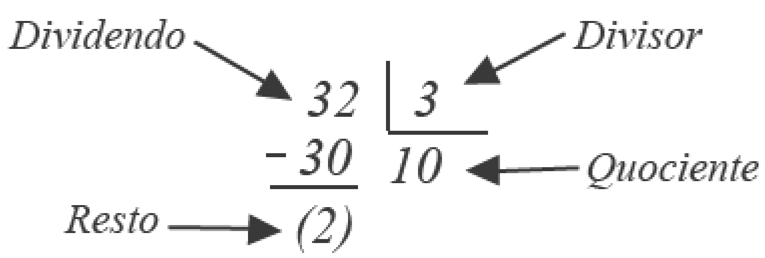
A solução para esses três amigos seria que cada um começasse o jogo com uma quantidade igual de peças (digamos sete peças para cada). Nesse caso, uma maneira popular de se proceder com o jogo quando um dos jogadores não tiver uma peça a ser jogada na rodada, ele retiraria uma peça dentre as que sobraram.

Situação 2

Três amigos saíram para comer pizza e pediram uma de tamanho grande que vem dividida em oito fatias. A pizza custou R$30 e dividir a conta não foi nenhum problema. Mas já que todos pagariam por igual pela pizza, nada mais justo que cada um deles coma a mesma quantidade. Eles combinaram então que cada um ficaria com duas fatias e dividiriam cada uma das duas fatias que “sobrariam” em três pedaços iguais, transformando essas duas fatias em seis pedaços menores. Cada um então comeria duas fatias inteiras e mais dois pedaços menores das fatias que sobrariam e não haveria confusão ao final da noite.

Note que na primeira situação a nossa unidade seria “peça de dominó” e na segunda situação seria “fatia de pizza”. Uma diferença crucial entre essas unidades é que sobre uma delas, a peça de dominó, não faz sentido falar em dividir a unidade. Já a fatia de pizza pode ser dividida em pedaços menores que a unidade.

Formalmente dizemos na situação 1 que o número total de peças é o dividendo, o número de jogadores é o divisor, as 10 peças que ficariam com cada jogador chamamos de quociente e as peças que sobraram dessa divisão de resto.



Na segunda situação, na qual a nossa unidade é “fatia de pizza”, faz sentido pensar em dividir a unidade em partes menores. O que resolveu o nosso problema foi dividir uma unidade em três partes iguais. Matematicamente tínhamos o problema de dividir 8 por 3. Podemos representar essa divisão pela fração 8/3, onde o 8 é chamado de numerador e o 3 de denominador. Cada amigo teve o direito de comer 8/3 (oito terços) de fatias da pizza. Para que isso fique mais claro podemos observar a figura abaixo:

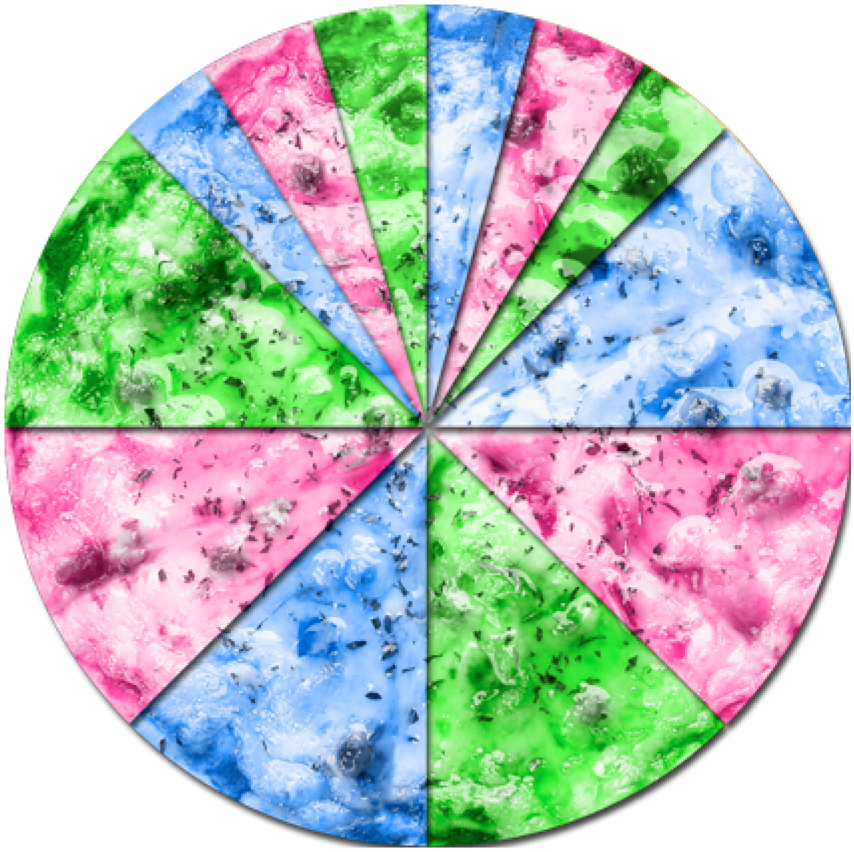


Figura 1

Cada fatia da pizza representa nossa unidade de medida. Mas cada uma delas pode ser dividida em três pedaços iguais que representam 1/3 (um terço) de fatia. Se cada cor representa o que um dos três amigos tem o direito de comer e cada fatia inteira representa 3 x 1/3 (um terço de fatia), cada amigo terá 3/3+ 3/3+1/3+1/3=8/3 de fatia de pizza. Essa divisão não deixa resto (não sobrou pizza!) e resulta em um valor que pode apresentar partes não inteiras da unidade, que, nesse caso, são os pedaços da fatia de pizza. Chamamos esse tipo de divisão de divisão real ou quociente exato.

Essas situações-problema serviram para ilustrar casos do cotidiano em que a operação matemática conhecida como divisão fez-se necessária para chegarmos a uma solução. Muitas relações que aparecem no nosso cotidiano são expressas matematicamente por divisões (ou razões, como veremos a seguir). O conceito de velocidade, por exemplo, surge da divisão entre uma distância percorrida e um intervalo de tempo.

Decorrendo disso, a unidade em que medimos a velocidade é exatamente uma unidade de medida de comprimentos (m ou km) dividida por uma unidade de tempo (s ou h), ou seja, m/s (lê-se metros por segundo) ou km/h (lê-se quilômetros por hora).

Você já precisou fazer esse tipo de cálculo? Apostamos que sim

Imagine que você vai viajar para visitar sua tia Ana, mas precisa abastecer o carro antes. Além do mais, já são 5 horas da tarde e ela gosta de dormir às 9 horas da noite. Então, surgem as perguntas:

Quantos litros de gasolina você precisa para realizar a viagem?

Qual a velocidade que você precisa manter para chegar a tempo antes que a tia Ana durma?

Será que ela vai fazer aquele bolinho de milho que você adora?

Para obter as respostas às três primeiras perguntas, você precisará de informações adicionais, como o rendimento do carro, a distância para a casa da tia Ana e o preço da gasolina, e deverá utilizar os conceitos de razão e proporção que introduziremos a seguir. A resposta da quarta pergunta só será positiva se você tiver calculado tudo direitinho e chegado a tempo! Então, mãos à obra!

Você sabe o que significa razão?

Existem diferentes significados para a palavra razão, dependendo do contexto em que a palavra é empregada. Em nosso caso, estamos preocupados com a definição da palavra razão no contexto matemático. Segundo o dicionário Michaelis, a palavra razão possui vários significados na Matemática, dentre os quais destacamos o seguinte:

> **Razão de dois números**: dados em certa ordem, é o quociente exato do primeiro pelo segundo.

Em outras palavras, uma razão é o resultado de uma divisão (quociente exato ou simplesmente quociente) entre dois números.

Chamamos de razão entre dois números a e b, o quociente $\frac{a}{b}$, onde a é chamado **antecedente** e b é o **consequente**, sendo b diferente de zero porque a divisão por zero não é definida.

Uma razão é, então, um número. O significado exato de uma razão depende das grandezas que estão sendo medidas e das unidades que estão sendo usadas. Por exemplo, uma das informações de que você precisa para responder à primeira pergunta sobre a visita à tia Ana é o rendimento do carro. Digamos que o manual do carro especifique que o rendimento é de 15 km/ ℓ . Essa razão significa que com um litro de combustível o carro consegue, em média, percorrer 15 km. Podemos dizer ainda que a cada 15 km percorridos o carro gasta, em média, um litro de combustível. O rendimento poderia ser representado como $15/1\ Km/l$, mas o 1 é omitido, pois $\frac{15}{1} = 15$.

No caso do rendimento do carro, estamos falando de uma correspondência entre grandezas diferentes. Em outras situações, podemos falar da correspondência entre unidades diferentes da mesma grandeza, como quando usamos a razão 60s/min, ou 60s/1min, para dizer que existem 60 segundos (s) por minuto (min). Quando dizemos que existem 24 horas (h) por dia (dia), estamos falando da razão 24h/dia. Nesses casos, utilizamos diversas unidades da mesma grandeza: tempo. Nesse tipo de situação, a razão diz quantas vezes a unidade do antecedente (ex.: hora) cabe na unidade do consequente (ex.: dia).

Se Liga!

Note que essas razões podem ser constantes ou variáveis. Quando falamos de uma razão de 24h/dia, temos uma razão constante, ou seja, nunca irá mudar. Por outro lado, o *rendimento* e a *velocidade* do carro variam ao longo do tempo. O *rendimento* dependerá de diversos fatores, como a inclinação da pista, condições do vento, qualidade da gasolina, entre outros. Por sua vez, a *velocidade* dependerá das condições de tráfego, do estado da pista etc. Diante de situações como essas, em que há dificuldade em se considerar todas as variações das grandezas envolvidas nas razões variáveis, costumamos considerar valores *médios*.

Vídeo 02 - Razões e Proporções.

Atividade 01

Você percebeu como as razões matemáticas aparecem naturalmente e frequentemente em nosso cotidiano? Identifique outras razões matemáticas comuns à sua rotina e anote-as. Para cada uma delas, indique a grandeza e unidade de medida do antecedente e do consequente.

E o que significa proporção?

Uma proporção é definida como uma igualdade entre duas ou mais razões. Sejam as razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, onde os *termos da proporção* a, b, c e d são números diferentes de zero. A proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ declara que o quociente q entre os dois primeiros termos, a e b, é igual ao quociente entre os dois últimos termos, c e d. Costumamos ler $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ da seguinte forma: "*a está para b, assim como c está para d*". O quociente q é chamado de *constante de proporcionalidade*.

Se Liga!

A proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ também pode ser escrita como $a : b = c : d$, onde a e d são os **extremos** da proporção, e b e c seus **meios**.

Com muita frequência o uso de razões em nosso dia a dia vem associado à noção de proporção, pois usamos o fato de que a razão entre duas grandezas é constante (a constante de proporcionalidade) para calcular as informações que buscamos. Quando a razão não é constante, trabalhamos muitas vezes com valores médios, para simplificar, como no caso do rendimento do carro.

Exercício resolvido 1

Quantos litros de gasolina eu preciso para realizar a viagem?

Voltemos ao nosso problema da viagem à casa da tia Ana. O carro faz, em média, 15km/ℓ. Isso é o bastante para saber quantos litros de gasolina são necessários? Não, né? Falta saber quantos quilômetros devem ser percorridos, pois para cada 15 km, você precisará, em média, de 1 litro de gasolina. A casa de tia Ana fica a exatamente 300 km de onde você está.

▼ Mostrar Solução

Então, o cálculo que você precisa fazer é descobrir quantos trechos de 15 km serão percorridos para completar os 300 km de distância total $\frac{300}{15} = 20$, ou *300 = 20.15*) e, dado que para cada 15 km é preciso 1 litro, ao todo você vai precisar de 20 vezes 1 litro, ou seja, 20ℓ de gasolina, em média.
Se formos pensar em termos de razões e proporções, esse raciocínio seria um pouco diferente. Sabemos que a constante de proporcionalidade do problema é 15 km/ℓ. Então, dado que temos 300 km a percorrer, precisamos descobrir o divisor (x) tal que $\frac{300}{x} = 15$. Esse é o número de litros de gasolina de que você precisará para não ficar parado na estrada (mas recomendamos colocar sempre um pouco mais, lembrando que ficar parado sem gasolina na estrada é uma grande dor de cabeça e o que fizemos foi apenas uma estimativa baseada no rendimento médio).

Atividade 02

Quantos reais de gasolina irei gastar?

Ao parar em um posto para abastecer antes da viagem, você vê o preço do combustível dado por uma razão entre duas grandezas distintas: a moeda corrente do país e o volume do combustível. No Brasil, onde o real ($R\$$) é a unidade monetária oficial e o litro (ℓ) é a unidade de volume adotada nos postos de abastecimento, o preço é definido por uma razão de x reais por y litros como, por exemplo, $R\$\ 3,12/\ell$. Então, quantos Reais você irá gastar de gasolina para chegar na casa da tia Ana?

Exercício resolvido 2

Qual a velocidade que preciso manter para chegar a tempo?

Você sabe que para chegar a tempo para pegar tia Ana acordada você deve fazer a viagem em até 4 h. Também sabe a distância a ser percorrida (300 km).

Mostrar Solução

Então, você precisa fazer 300 km em 4 horas, correspondente a uma razão de $\frac{300km}{4h}$, o que simplificando a fração, dá $\frac{75km}{1h}$, que deverá ser sua velocidade média (75km/h) durante a viagem.

Se Liga!

Existem grandezas *diretamente* e *inversamente proporcionais* entre si. Quando uma grandeza aumenta na mesma proporção com o aumento da outra (quanto maior a distância, proporcionalmente mais gasolina será gasta), dizemos que ela é *diretamente proporcional.* Já quando uma grandeza diminui na mesma proporção quando a outra aumenta, e vice-versa (quanto maior for a nossa velocidade, proporcionalmente, em menos tempo chegaremos ao nosso destino), dizemos que ela é *inversamente proporcional*, que será visto na aula 02.

Qual a relação entre razões e porcentagens?

Após certo tempo dirigindo a caminho da casa da tia Ana, você resolve fazer uma parada para descansar um pouco em um ponto de apoio. Saindo do carro, você deixou em seu bagageiro 100 latinhas de refrigerante (para o churrasco de família no dia seguinte). Ao retornar ao carro, você percebe que 15 das 100 latinhas de refrigerante estouraram devido ao grande calor do dia. Qual a razão entre o número de latas que estouraram e o total original de latas? Ora, como 15 das 100 latas estouraram, a razão procurada é $\frac{15}{100}$. Essa razão nos informa que, a cada cem, quinze latas se perderam, o que pode ser escrito simplesmente como 15% (quinze *por cento*).

De maneira geral, podemos dizer que uma taxa de porcentagem é uma *razão de consequente igual a 100*. Quando dizemos 10%, estamos abreviando a escrita de $\frac{10}{100}$. Portanto, quando uma loja dá uma taxa de 10% de desconto, o valor de seu desconto será de R$10 a cada R$ 100 em compras. Se o valor total de suas compras nesta loja for R$ 200, então seu desconto será de R$ 20. De forma geral, dada uma *taxa de desconto de d%* em uma compra de valor v, o valor total do desconto, dt, será calculado de acordo com a seguinte fórmula:

$$dt = (\frac{d}{100}).v$$

Você não queria deixar ninguém sem refrigerante, então resolveu comprar 15 latinhas de refrigerante e algumas coisas que tinha esquecido (na verdade muitas) numa lojinha na beira da estrada. Ao passar tudo no caixa, a conta deu $R\$$ 300, mas por sorte a lojinha estava fazendo aniversário e dando 10% de desconto em seus produtos. Muito esperto você pensou: a taxa de desconto é de 10% ($d = 10$) e o valor total das compras é de $R\$$ 300 ($v = R\$\ 300$), então o valor total do desconto será $dt = (10/100).(R\$\ 300) = R\$\ 30$.

Vídeo 03 - Índices de Aproveitamento

Atividade 03

Quantos reais de gasolina irei gastar?

Seguindo a viagem, percebeu que no saco de batatinha frita que você foi comendo no caminho e que normalmente compra por $R\$$ 10 o pacote de 400g, estava escrito "Leve 500g e pague 400g". Esse tipo de promoção pode ser vista como uma porcentagem a mais do produto que veio de graça ou como um desconto no preço do kg do produto. Então, qual foi a *porcentagem* de batatinha que você recebeu a mais? Ou, se visto como desconto, qual foi a porcentagem desse desconto?

Finalmente, você chegou na casa da tia Ana! Ela te recebeu com um grande abraço e um beijo.

- Já são quase 9 horas da noite meu amor, vou dormir. - Falou a tia Ana - Mas antes vá na cozinha e veja o que preparei para você.

Ah, o delicioso bolo de milho! Obrigado, matemática!

Vídeo 04 - Razões e Proporções

Vídeo 05 - Acréscimos e Descontos

Grandezas e proporcionalidade

Vamos retomar o que vimos até agora de uma maneira mais formal. Uma grandeza é tudo aquilo que pode ser comparado por meio de medidas, como a quantidade de habitantes de sua cidade, o peso de um corpo ou a altura de um edifício. Para que as comparações sejam possíveis, uma grandeza é caracterizada por um número que corresponde à medida observada no objeto de interesse. Tal propriedade pode ser a quantidade, tamanho, peso ou outra característica do objeto. Existem casos em que duas grandezas não têm relação uma com a outra e outros onde o valor de uma é relacionado ao valor de outra por uma proporção. Em nosso estudo, estamos interessados em grandezas que são direta ou indiretamente proporcionais entre si, como veremos a seguir.

Dizemos que uma grandeza *G1* é *diretamente proporcional* à grandeza G2 quando seus valores são relacionados por uma **função de proporcionalidade direta**

$$f(x) = q \cdot x$$

onde *q* é a constante de proporcionalidade. Isso é fácil de ver se reescrevermos a expressão como

$$\frac{f(x)}{x} = q$$

ou chamando $f(x)$ de y,

$$\frac{y}{x} = q$$

Isso significa que se dobrarmos o valor x de G1, dobramos o valor associado ($f(x)$) de G2; ao triplicarmos o valor de x de G1, triplicamos o valor associado ($f(x)$) de G2, e assim por diante. Por exemplo, considere que um grupo de amigos foi a uma loja de conveniência e decidiu comprar barras de chocolate, cada uma a um custo de $R\$\ 1,5$. Quanto mais barras de chocolate forem compradas, maior a quantia a ser paga. A tabela a seguir mostra a relação existente entre o *número de barras de chocolate* e a *quantia a pagar*, as duas grandezas envolvidas em nosso exemplo.

Número de barras de chocolate	**Quantia a pagar ($R\$$)**
1	1,50
2	3,00
3	4,50

Tabela 1 - Exemplo de grandeza diretamente proporcional.

Neste caso, as duas grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, pois se a quantidade de barras de chocolate compradas dobra, a quantia a ser paga também dobra; se a quantidade de barras de chocolate comprada triplica, a quantia a ser paga também triplica.

Nesse exemplo, a grandeza G1 (*x*) são barras de chocolate, a G2 (*f(x)*) é o custo em Reais, e a função de proporcionalidade é

$$f(x) = 1,5 \cdot x$$

Vídeo 06 - Proporcionalidade

Atividade 04

Sabendo que duas barras de chocolate custam $R\$3,00$ e que cinco barras de chocolate custam $R\$7,5$, monte a equação que corresponde à proporção existente entre o valor total a pagar e o número de barras de chocolate compradas, deixando claro quanto vale a constante de proporcionalidade. Por fim, indique quanto custa cada barra de chocolate.

Leitura Complementar

Para complementar seu estudo sobre as razões, proporções e porcentagens, consulte estas fontes:

BRASIL ESCOLA. **Escalas cartográficas**. Disponível em: http://brasilescola.uol.com.br/geografia/escalas.htm. Acesso em: 24 jul. 2017.

Nessa página, você vai encontrar informações sobre as escalas, que são expressões capazes de mostrar a proporcionalidade entre o mundo real e sua representação no gráfico.

WIKIPÉDIA. **Proporção Áurea**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea. Acesso em: 24 jul. 2017.

A proporção áurea é uma curiosidade matemática que surge em vários elementos da natureza, corpo humano, arquitetura etc. Descubra um pouco mais sobre ela no artigo indicado.

Resumo

Nesta aula, você aprendeu um pouco mais sobre alguns conceitos matemáticos importantes, os quais servirão como ponto de partida para sua formação. Mesmo que a princípio não seja evidente, os conceitos de *razão*, *porcentagem* e *proporção* serão muito úteis ao entendimento dos problemas e à criação de programas computacionais para resolvê-los. Como você pôde observar, muitos problemas do dia a dia têm relação direta com conceitos matemáticos. Portanto, ao nos depararmos com os problemas reais, será muito proveitoso identificarmos as construções matemáticas que lhes dão suporte, o que nos permitirá aplicar recursos matemáticos ao desenvolvimento de soluções computacionais. A capacidade de empregar diversos recursos na criação de soluções computacionais será fundamental na sua vida profissional.

Autoavaliação

1. Defina com suas palavras o que é razão, porcentagem e proporção.

2. Refaça os exercícios resolvidos na aula sem olhar as soluções. Caso tenha dificuldades em um primeiro momento, use a solução apresentada como um guia para a sua solução

   [Questões 3 a 8 são interativas, para se obter a resposta, *clique fora* do campo de respostas!]

3. A distância entre Porto Alegre e Curitiba é de 1.140 km. Qual a velocidade média de um ônibus que faz esse percurso em 15 horas?

   ____

4. Dos 800 alunos de uma escola, 480 são meninos e o restante, meninas. Escreva a razão entre o número de:

   a. Meninos e meninas.
   ____________ Exemplo de resposta: *1/2*

   b. Meninas e o total de alunos.
   ____________ Exemplo de resposta: *1/2*

   c. Meninos e o total de alunos.
   ____________ Exemplo de resposta: *1/2*

5. Represente as razões encontradas na questão anterior como porcentagens.

   a.
   ____________%

   b.

__________%

c.

__________%

6. O salário de Ana corresponde a 90% do salário de Paula. A diferença entre os salários é de $R\$$ 500,00. Sendo assim, qual o valor do salário de Ana?
$R\$$ __________,00

7. A razão das idades de duas pessoas é $\frac{3}{2}$. Descubra essas idades sabendo que sua soma é 35 anos.
__________ e __________ anos.

8. Se com 20 reais conseguimos encher 30% do tanque de combustível de um carro com gasolina, quantos reais precisamos para encher o mesmo volume com álcool? (sabendo que o preço do álcool está para gasolina numa proporção $\frac{3}{4}$).
$R\$$ __________,00

Referências

DICIONÁRIO ONLINE MICHAELIS. **Razão**: verbete. Disponível em: http://michaelis.uol.com.br/. Acesso em: 1 fev. 2010.

GLAZER, E. M.; MCCONNELL, J. W. **Real-life math, everyday use of mathematical concepts**. Westport: Greenwood Press, 2002.

LIMA, E. L. et al. **Temas e problemas elementares**. Rio de Janeiro: SBM, 2005.