Matemática Aplicada a jogos

Aula 05 - Transformações

Material Didático do Instituto Metrópole Digital - IMD
Versão 5.0 - Todos os Direitos reservados

Apresentação

Na primeira aula desta disciplina tratamos de espaços orientados e especialmente do plano cartesiano, o qual nos permite localizar objetos a partir de um ponto fixo chamado de origem. As coordenadas de um ponto nos dizem exatamente qual é a sua localização relativa à origem do espaço orientado.

Nesta aula abordaremos situações semelhantes a essa. Para compreendê-las melhor precisamos relacionar o plano cartesiano com vetores, assunto abordado em nossa aula anterior.

Na aula 04 vimos que existe uma relação entre o ponto (a, b) e o vetor $\vec{u} = (a, b)$. Cada ponto do plano está, então, relacionado a um vetor.

Além disso, note que qualquer vetor $\vec{u} = (a, b)$ de duas dimensões pode ser escrito na forma

$$\vec{u} = a(1, 0) + b(0, 1).$$

A operação

$$\vec{u} = a(1, 0) + b(0, 1).$$

chama-se *combinação linear* dos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$, com coeficientes a e b. Como qualquer vetor do espaço de duas dimensões, ou seja, do plano, pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$, dizemos que esses vetores geram esse espaço e formam uma *base* dele.

A base de um espaço é de extrema importância, mas não é única, pois existem outros pares de vetores que geram o plano. No entanto esses vetores são chamados de base canônica do espaço de duas dimensões, pois além de o gerarem, ambos são vetores unitários e ambos apontam no sentido positivo do sistema de eixo. Essas propriedades fazem deles os candidatos perfeitos para avaliarmos o que acontece com os objetos do espaço quando aplicamos sobre eles uma transformação.

Assim como as coordenadas cartesianas nos mostram a localização de pontos no plano a partir da origem do sistema, conhecer a base de um espaço de vetores nos dá uma referência a partir da qual devemos enxergar todos os outros vetores.

Como vocês podem perceber, esta aula fala sobre transformações. Em geral, qualquer matriz quadrada descreve uma transformação. Como estamos trabalhando com o espaço de dimensão 2, trabalharemos com matrizes quadradas 2×2 para a maioria das transformações aqui abordadas.

Objetivos

- Entender o significado geométrico de uma transformação;
- Escrever transformações que sejam capazes de produzir uma rotação;
- Escrever transformações que sejam capazes de produzir uma mudança de escala;
- Escrever transformações que sejam capazes de produzir uma translação.

1. Transformações

Nas aulas 04 e 05 da disciplina de Matemática Aplicada do módulo básico nós aprendemos o que são matrizes, como são representadas, como efetuar operações entre matrizes e algumas aplicações do conceito.

Na aula passada estudamos o conceito de vetor de maneira restrita. Como foi dito na oportunidade, esse conceito é muito mais abrangente que o abordado no escopo dessa disciplina. Matrizes, por exemplo, também são vetores. E um vetor pode ser visto também como uma matriz linha ou coluna, dependendo de sua representação ser horizontal ou vertical, respectivamente.

Nesta aula nos preocuparemos com o real significado que uma matriz carrega, geometricamente falando. Essa interpretação geométrica que será introduzida a respeito das matrizes é essencial para entender o tipo de transformação que uma dada matriz realiza sobre o plano cartesiano.

A transformação de um vetor é obtida através do produto da matriz que a representa pelo vetor. Aqui nos referimos ao produto de matrizes, com a matriz 2×2 sempre à esquerda e o vetor representado como uma matriz coluna. Se uma determinada matriz representa uma rotação de 45°, por exemplo, multiplicá-la por um vetor resultará no vetor rotacionado 45°.

Mas como saber qual é a cara da transformação? Qual a relação entre uma mudança visível em objetos do plano (como rotações e alterações na escala) e os quatro números que aparecem dentro de uma matriz 2×2? Como podemos construir uma matriz que realize uma determinada transformação?

Para que possamos responder a essas perguntas vamos verificar o que ocorre com os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$ quando os multiplicados por uma matriz 2×2 qualquer:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix},$$

e

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}.$$

Os resultados acima nos dizem que a primeira coluna de uma matriz carrega o vetor resultante da transformação que ela representa aplicada sobre o vetor $(1, 0)$ e a segunda coluna carrega o vetor resultante da transformação aplicada sobre o vetor $(0, 1)$.

Sabendo o que ocorre com os vetores da base do espaço, saberemos tudo o que precisamos a respeito da transformação. Isso porque qualquer outro vetor pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base. Veja o que ocorre ao multiplicarmos uma matriz 2×2 por um vetor qualquer $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

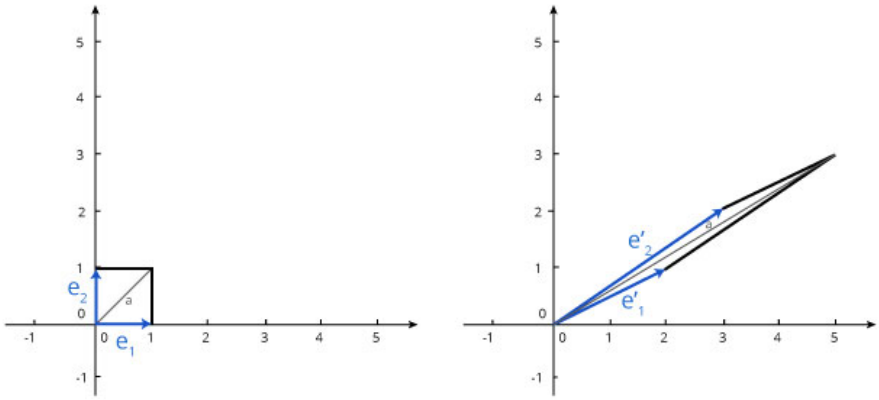
$$a \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + b \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$a \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

O produto acima resulta em uma combinação linear das colunas da matriz da transformação com coeficientes iguais às componentes do vetor $\vec{u}$. Podemos perceber que uma transformação muda os vetores da base e, assim, muda todos os outros vetores do espaço.

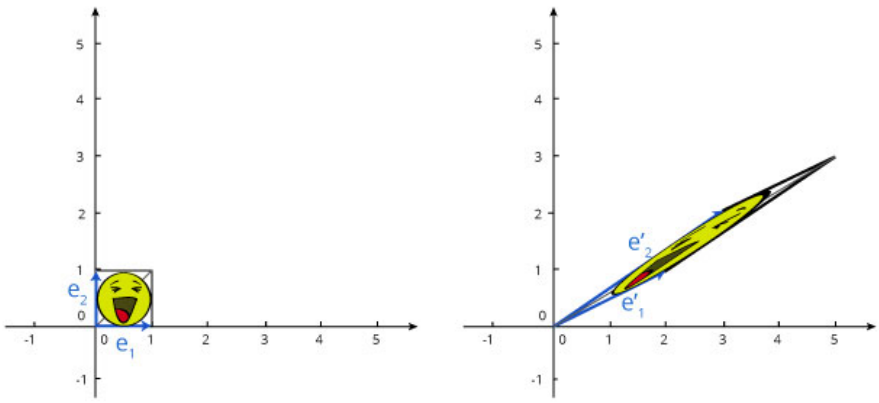
Agora ficou mais simples de entender que tipo de transformação uma matriz representa, não é verdade? A Figura 1 mostra em a) os vetores da base, que chamamos de $\overrightarrow{e_1}$ e $\overrightarrow{e_2}$ e um paralelogramo formado por segmentos paralelos a eles. Em b) temos os vetores (e o paralelogramo) transformados pela matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Note que os vetores $\overrightarrow{e_1'}$ e $\overrightarrow{e_2'}$ são as colunas da matriz A.

Figura 01 - a) Vetores da base b) Vetores resultantes da transformação dos vetores da base.



Se posicionarmos uma imagem dentro do paralelogramo a transformação pode ficar mais clara, como observado na Figura 2 a seguir.

Figura 02 - a) Objeto antes da transformação b) Objeto depois da transformação.



Exercício resolvido

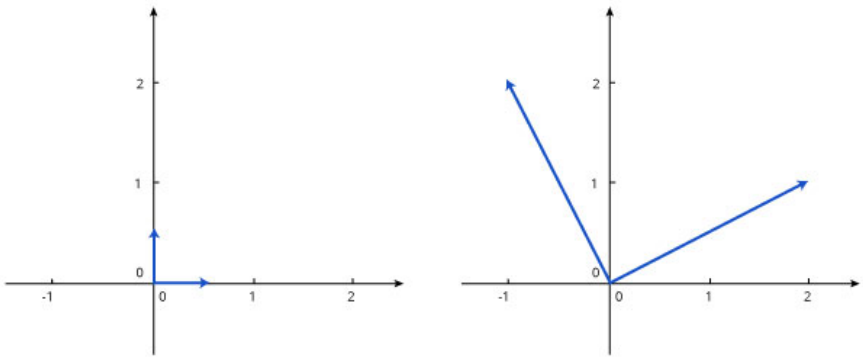
Que tipo de transformação a matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

gera?

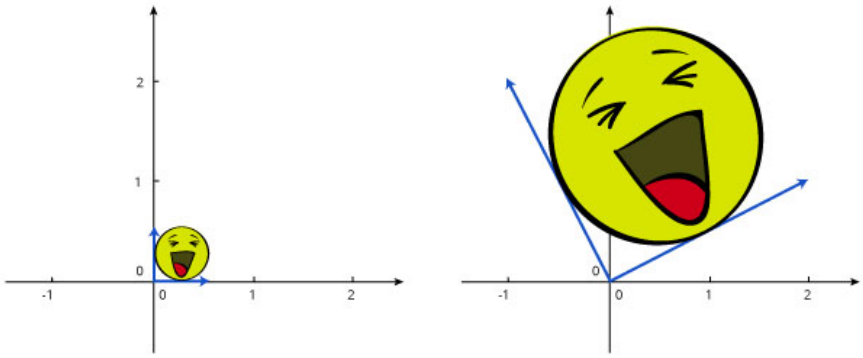
Para responder a essa pergunta precisamos entender o que a matriz faz com os vetores da $(1,0)$ e $(0,1)$. Mas já vimos que o resultado da transformação de cada um desses vetores corresponde a uma coluna da matriz da transformação. Então sabemos que o vetor $(1,0)$ será transformado em $(2,1)$ e o vetor $(0,1)$ será transformado em $(-1,2)$.

Figura 03 - a) Vetores da base b) Vetores resultantes da transformação dos vetores da base.



Podemos perceber que a matriz dada realiza uma rotação no sentido anti-horário e também uma mudança na escala. Se colocarmos uma imagem dentro do paralelogramo formado por segmentos paralelos aos vetores, como fizemos na Figura 4, poderemos perceber o efeito da transformação aplicada sobre essa imagem.

Figura 04 - a) Objeto antes da transformação b) Objeto depois da transformação.



Todas as transformações que são realizadas a partir do produto de uma matriz por um vetor são chamadas de *transformações lineares*.

As transformações lineares preservam linhas retas e mantêm o paralelismo, ou seja, dois segmentos paralelos resultarão, após a transformação, em dois segmentos paralelos. Além disso, as transformações lineares preservam o vetor nulo. Isso não ocorre na translação.

A translação é efetuada a partir de uma soma de vetores, em oposição às demais transformações a serem abordadas nesta aula, que são realizadas através de produtos de matrizes e, portanto, são transformações lineares.

Chamamos a translação, e qualquer transformação linear seguida de uma translação, de *transformação afim*.

Nas próximas seções detalharemos tipos específicos de transformações como rotação, escala e translação.

2. Rotação

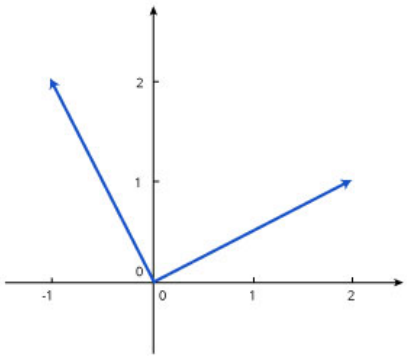
Na aula 10 da disciplina de Matemática Aplicada do Módulo Básico nós tivemos o primeiro contato com matrizes que geravam uma rotação. Nesta aula desenvolveremos melhor essa ideia.

Como estamos trabalhando em duas dimensões, existe apenas um tipo de rotação a ser abordada: a rotação em torno de um ponto. Além disso, como a rotação é uma transformação linear, ela preserva o vetor nulo. Ou seja, a transformação aplicada no vetor nulo resulta nele mesmo. Portanto afirmamos que em duas dimensões a única rotação que pode ser executada é a rotação em torno da origem. Dessa forma temos apenas um parâmetro para essa transformação, o

ângulo de rotação. Assim, esta é a convenção que utilizamos: a rotação cujo parâmetro é um ângulo positivo é realizada no sentido anti-horário e a rotação cujo parâmetro é um ângulo negativo é realizada no sentido horário.

Como podemos, então, construir uma matriz que realiza uma rotação? A Figura 5 abaixo nos mostra os vetores da base rotacionados por um ângulo $\theta > 0$. Como os vetores da base possuem norma igual a um e uma rotação não interfere na escala desses vetores, os vetores abaixo também são vetores unitários.

Figura 05 - Rotação de θ° aplicada sobre os vetores da base canônica.



Para encontrar a matriz que realiza essa rotação basta encontrarmos as coordenadas dos pontos A e B mostrados na figura.

Mas isso pode ser feito facilmente apenas conhecendo o ângulo θ.

Temos que

$$x_A = cos\theta \text{ e } y_A = sen\theta,$$
$$x_B = -sen\theta \text{ e } y_B = cos\theta,$$

onde $A = (x_A, y_A)$ e $B = (x_B, y_B)$.

Sabemos que os vetores da Figura 5 têm componentes iguais às coordenadas dos pontos A A e B B e sabemos que a matriz de uma transformação tem suas colunas iguais aos vetores resultantes da transformação dos vetores da base. Portanto, a matriz de uma rotação cujo parâmetro é o ângulo θ é

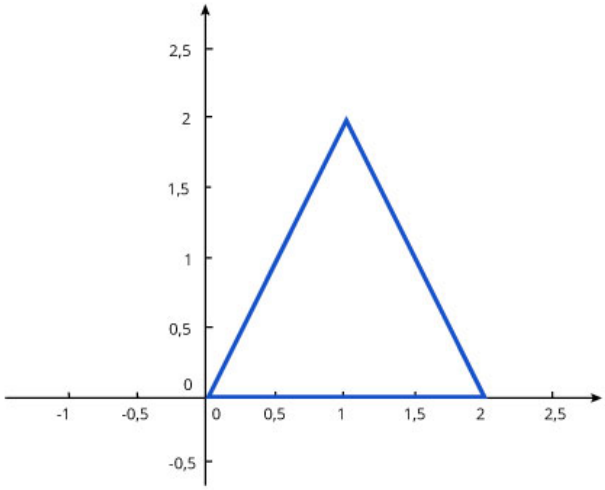
$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$$

Exercício resolvido

Um triângulo tem vértices na origem e nos pontos $(2,0)$ e$(1,2)$. Encontre os vértices desse triângulo após realizar sobre ele uma rotação de 45°.

A Figura 6 abaixo mostra o triângulo que devemos rotacionar.

Figura 06 - Triângulo sobre o qual aplicaremos uma rotação.



Podemos perceber nessa figura que um dos vértices do triângulo coincide com a origem. Sabemos que uma transformação linear preserva a origem, então nada temos que fazer com relação a esse ponto. Para realizar a rotação sobre o triângulo precisamos aplicar a transformação sobre o vetores $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Mas primeiro precisamos obter a matriz da transformação.

$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos45^\circ & -sen45^\circ \\ sen45^\circ & cos45^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

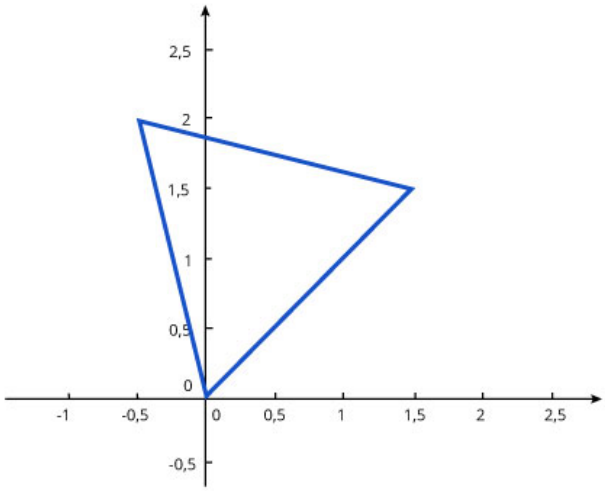
Agora, aplicaremos a transformação aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Os novos vértices do triângulo serão $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ e $(0, 0)$. A Figura 7 mostra o triângulo rotacionado:

Figura 07 - Triângulo rotacionado.



Note como a forma do triângulo não se altera. Apenas sua posição é alterada.

Uma transformação de corpo rígido é uma transformação que preserva distâncias e ângulos, ou seja, não altera a forma dos objetos transformados.

Assim, uma rotação é uma transformação de corpo rígido.

Atividade

Um quadrado tem vértices nos pontos $(1,1), (2,1), (2,2)$ e $(1,2)$. Encontre as coordenadas de seus vértices após uma rotação de 30° em torno da origem.

3. Escala

As transformações de escala modificam as dimensões dos objetos, isto é, fazem objetos crescerem ou diminuírem em determinadas direções.

Podemos transformar um objeto inteiro, proporcionalmente, por um fator de k, dilatando esse objeto com relação à origem. O resultado disso seria um objeto idêntico ao original com tamanho diferente. Essa é a chamada escala uniforme, que preserva ângulos e proporções. Os comprimentos aumentam ou diminuem por um fator de k e as áreas aumentam ou diminuem por um fator de k^2.

Se, por outro lado, queremos esticar ou achatar um objeto, devemos aplicar uma escala com fatores diferentes em direções diferentes, o que resulta em uma escala *não uniforme*. Uma escala não uniforme não preserva ângulos, e a variação de comprimentos e áreas depende da direção em que a escala foi aplicada.

O resultado da transformação depende intrinsecamente do fator de escala, que consideraremos ser sempre um número positivo. Se $k > 1$, os objetos transformados serão maiores que os originais na direção em que for aplicada a transformação. Se $k > 1$, os objetos transformados serão menores que os originais na direção em que for aplicada a transformação.

A maneira mais simples de efetuar uma transformação de escala é ao longo dos eixos coordenados. Uma escala de parâmetro k ao longo do eixo x transforma o vetor $(1,0)$ da base em um vetor de mesma direção e sentido com norma igual a k. Sabemos que

$$||k\vec{u}|| = |k|||\vec{u}||.$$

O vetor resultante da escala por um fator k do vetor $(1, 0)$ é, então, o vetor $k(1, 0) = (k, 0)$.

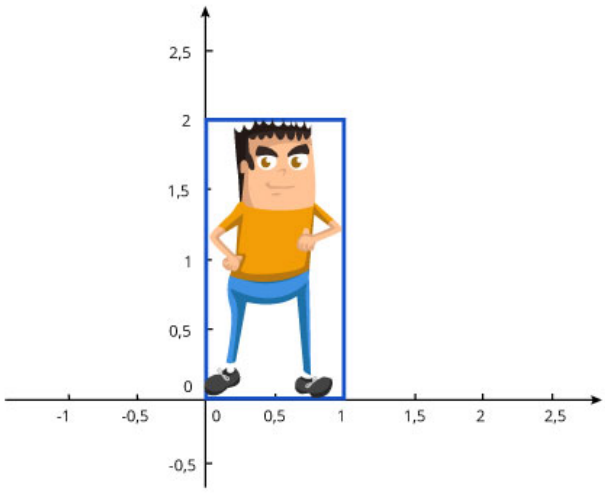
Então, a matriz

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

realiza uma transformação de escala ao longo do eixo x por um fator de k.

A Figura 8 abaixo mostra a imagem de um personagem sobre o plano cartesiano. Acrescentamos uma caixa em volta do personagem para melhor identificarmos a mudança nas suas dimensões.

Figura 08 - Personagem com dimensões originais.

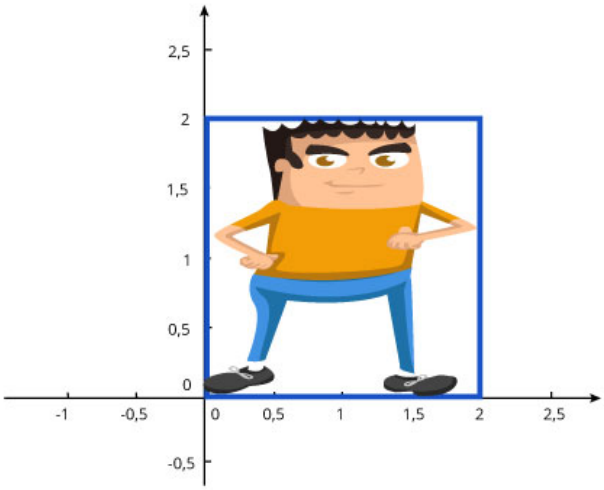


Ao realizar a transformação de escala ao longo do eixo com $k = 2$, dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

obtemos a imagem da Figura 9 abaixo.

Figura 09 - Transformação de escala na direção do eixo x



Note que nada se altera na direção do eixo y, fato já esperado uma vez que a segunda coluna da matriz é igual ao segundo vetor da base canônica.

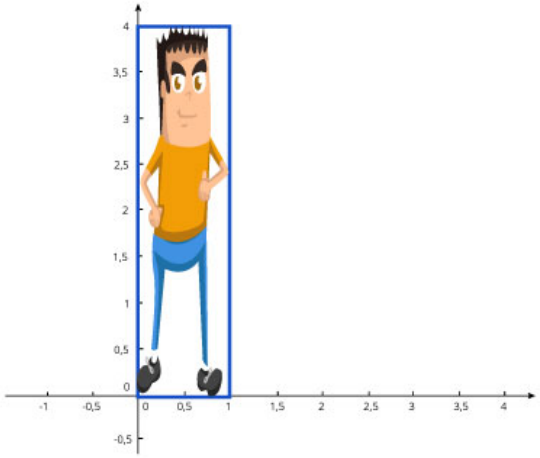
Para realizar uma transformação de escala na direção do eixo y o procedimento é análogo. A matriz dessa transformação será

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix},$$

para algum $k > 0$.

Fazendo $k = 2$ e aplicando a transformação na imagem da Figura 8, obtemos o resultado exposto na Figura 10.

Figura 10 - Transformação de escala na direção do eixo y



Essas duas transformações que abordamos até agora são não uniformes, uma vez que mantém a escala em uma direção e a altera na outra.

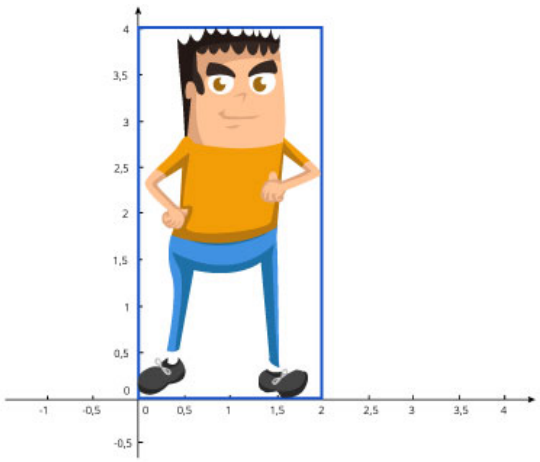
Uma transformação uniforme de escala é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix},$$

para algum $k > 0$.

Podemos ver na Figura 11 o resultado da transformação uniforme, para $k = 2$, aplicada na imagem da Figura 8.

Figura 11 - Transformação uniforme com $k = 2$



É possível, também, escalar nas direções dos eixos com fatores diferentes com matrizes do tipo

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix},$$

para $k_x > 0$ e $k_y > 0$.

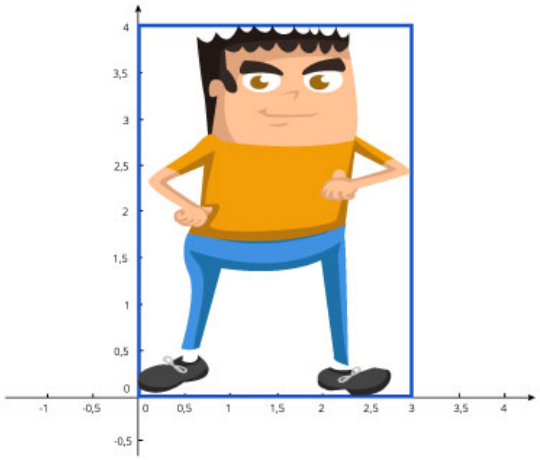
Sempre que k_x e k_y forem iguais, teremos uma transformação uniforme.

A Figura 12 mostra o resultado da transformação de escala da Figura 8 realizada pela matriz

$$\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix},$$

onde $k_x = 3$ e $k_y = 2$.

Figura 12 - Transformação de escala não uniforme com $k_x = 3$ e $k_y = 2$



A transformação de escala muitas vezes é utilizada para dar a impressão de proximidade, aumentando um objeto, ou distanciamento, o diminuindo, dentre muitas outras aplicações.

Uma mudança de escala é capaz de deformar objetos, achatando-os ou esticando-os. Basta que a escala seja não uniforme. Essa transformação, então, não é de corpo rígido como a rotação.

Atividade

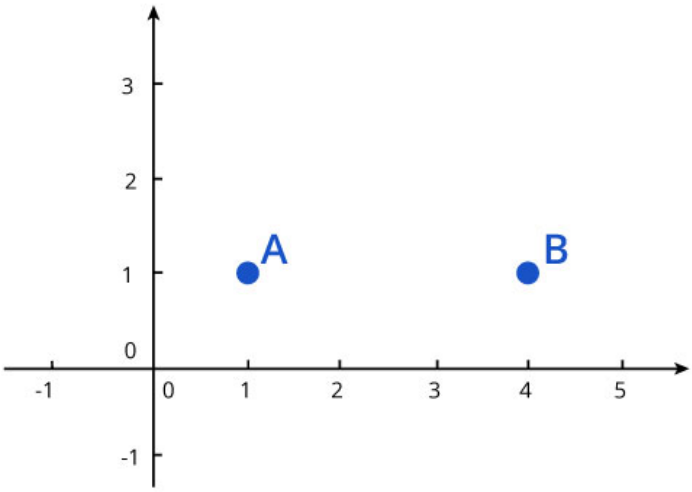
Encontre a matriz da transformação que dobra a altura e triplica a largura de objetos planos. Em seguida, aplique essa transformação no polígono cujos vértices têm as coordenadas $(1, 0), (2, 0), (2.5, 1), (1.5, 2)$ e $(0.5, 1)$, em seguida encontre os vértices do novo polígono escalado.

4. Translação

Conforme adiantamos na primeira seção desta aula, a translação não é uma transformação linear. Ela desloca horizontalmente e/ou verticalmente os objetos sem deformá-los, sendo uma transformação de corpo rígido. Como não é uma transformação linear, a translação não é efetuada pelo produto de matrizes e sim pela soma de vetores.

Se queremos deslocar um ponto do plano três unidades para a direita, como devemos proceder?

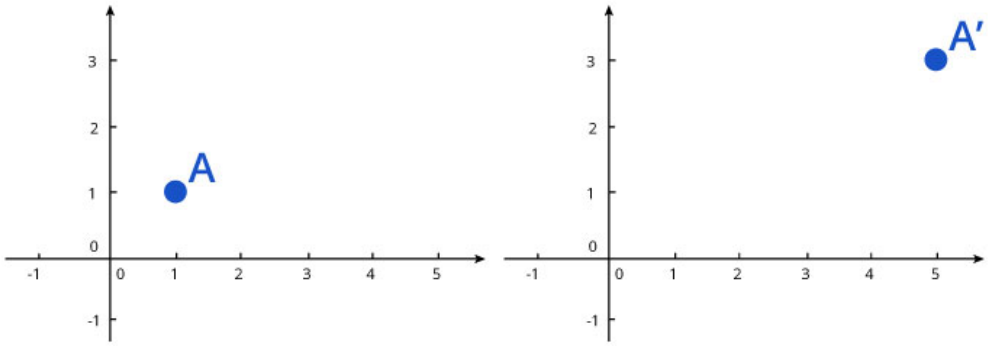
Figura 13 - Movendo o ponto A três unidades para a direita



A resposta é: Somando três unidades na sua abscissa! Para mover algo para cima ou para baixo devemos modificar a ordenada dos pontos. Em termos de vetores o que realizamos é uma soma.

A Figura 14 mostra a translação do ponto A obtida pela soma do vetor correspondente a ele com o vetor $(4, 2)$.

Figura 14 - a) Ponto A b) Translação do ponto A.



A translação é bastante utilizada para dar a ideia de movimento, sendo aplicada sobre objetos a cada *frame* desenhado na tela.

É possível obter uma translação através do produto de uma matriz 3×3 pelos vetores do plano. Para que possamos efetuar esse produto, no entanto, é necessário "acrescentar uma dimensão" nos vetores a serem transformados. Caso contrário, o produto pela matriz 3×3 não poderia ser efetuado. Acrescentamos, então, uma componente em cada vetor de valor igual a 1 para que não interfira no produto das matrizes.

A transformação ilustrada na Figura 14, por exemplo, poderia ser denotada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e efetuada pelo produto

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+4 \\ 0+1+2 \\ 0+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que representa o ponto $(5, 3)$ do plano, o ponto final da translação.

5. Combinando transformações

O artifício de utilizar uma matriz com uma linha e uma coluna a mais para realizar uma translação nos permite combinar essa transformação com rotações e transformações de escala.

Para entender esse processo imagine que queremos dobrar o tamanho de um objeto e em seguida rotacioná-lo em 45°. Devemos, então, aplicar sobre esse objeto as transformações dadas abaixo, respectivamente.

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Um vetor específico $\vec{v}$ transformado seria

$$R(E\vec{v}).$$

Como o produto de matrizes é associativo (Veja as aulas 04 e 05 da disciplina de Matemática do Módulo Básico), o vetor transformado seria

$$(RE)\vec{v},$$

ou seja, podemos combinar a rotação e a escala em uma única matriz que é o produto das duas matrizes que representam as transformações separadamente.

A matriz que realiza, especificamente, essa escala e essa rotação é

$$RE = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{2} & -\frac{2\sqrt{2}}{2} \\ \frac{2\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

E se eu quiser acrescentar a isso uma translação? Como devemos proceder?

A matriz generalista para uma translação é a seguinte:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde t_x e t_y são os valores da translação no eixo x e no eixo y, respectivamente.

Note que, na matriz acima existe uma submatriz (uma matriz menor embutida) 2×2 cujas colunas são iguais aos vetores da base canônica. Isso ocorre porque a matriz representa apenas uma translação, então essa submatriz não realiza nenhum tipo de transformação sobre os objetos do plano.

No entanto, se modificarmos essa submatriz de acordo com as transformações que desejamos realizar, podemos ter em apenas uma matriz os três tipos de transformação: rotação, escala e translação.

Já encontramos uma matriz capaz de realizar uma rotação e uma transformação de escala. Como seria a matriz que realiza, além dessas duas transformações, uma translação de uma unidade para a esquerda (no sentido negativo do eixo x) e duas unidades para cima?

Devemos combinar as matrizes

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Essa combinação também pode ser realizada através de um produto! Basta “completarmos” a matriz 2×2 de maneira conveniente. Nesse passo devemos acrescentar à matriz 2×2 a última linha e última coluna da matriz identidade de ordem 3. Veja abaixo:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Agora podemos efetuar o produto das matrizes, com a matriz da translação à esquerda:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Você pode pular esse passo! Basta substituir os elementos a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} da matriz da translação pelos seus equivalentes da matriz da transformação linear.

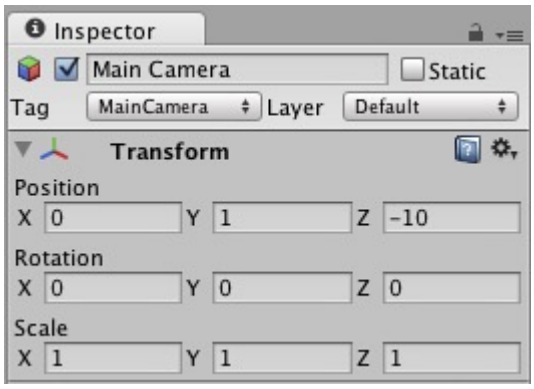
Dessa forma temos uma única matriz que realiza três transformações!

> Uma transformação linear seguida de uma translação é chamada de *tranformação afim*.

6. A matemática em ação: Movimentação de Elementos

No universo dos jogos, as transformações são essenciais para toda movimentação a ser feita, seja de personagens, inimigos, cenários ou qualquer outro elemento. Em *engines* poderosas como a Unity, a base de todo elemento é um objeto chamado *transform*. Esse elemento contém informações da posição x, y e z (No caso de jogos e aplicações em duas dimensões, o eixo z, que na ferramenta tem direção saindo da tela, tem a função de indicar a posição relativa de objetos, ou seja, quem está mais a frente e quem está mais atrás.) (denotadas com letras maiúsculas na ferramenta) de um objeto, os valores de suas rotações em torno dos eixos e o valor da escala de cada um dos objetos na direção dos eixos. Um exemplo pode ser visto na Figura 15.

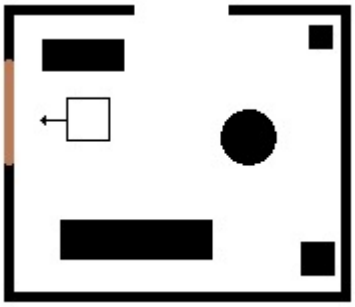
Figura 15 - Captura de tela do software demonstrando os elemento *transform* de um objeto no Unity.



Como podemos imaginar, esse elemento é de extrema importância para todos os objetos envolvidos, uma vez que é através dele que podemos posicioná-los na tela e realizar grande parte das interações que forem necessárias. Um exemplo simples disso é a movimentação de personagens ao longo de caminhos pré-definidos.

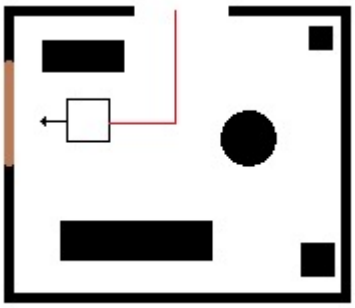
Quando um personagem está presente em uma cena de um jogo e precisa se mover, algumas transformações precisam ser aplicadas a ele para que essa movimentação seja feita de maneira adequada. Imagine que esse personagem esteja na borda do cenário, talvez observando por uma janela. Em uma visão de cima da cena, teríamos algo como pode ser visto na Figura 16:

Figura 16 - Personagem quadrado olhando pela janela.



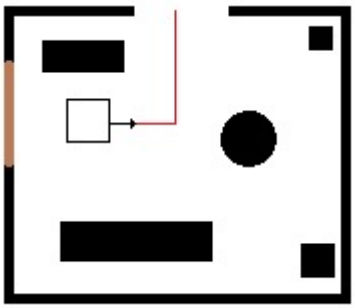
Agora, caso desejemos mover o personagem para a porta, devemos aplicar algumas transformações para que isso aconteça de maneira mais natural possível. Com os objetos pretos representando espaços onde não é possível o personagem estar, um caminho possível seria o demonstrado em vermelho na Figura 17:

Figura 17 - Caminho a ser percorrido pelo personagem.



Percebam que a primeira transformação necessária a ser feita pelo personagem é uma rotação de 180 graus, uma vez que o personagem está de frente para a janela (indicado pela seta). Com a rotação feita, a movimentação poderia então ser iniciada na direção correta, como indicado na Figura 18:

Figura 18 - Personagem com a orientação correta, pronto para iniciar a movimentação.

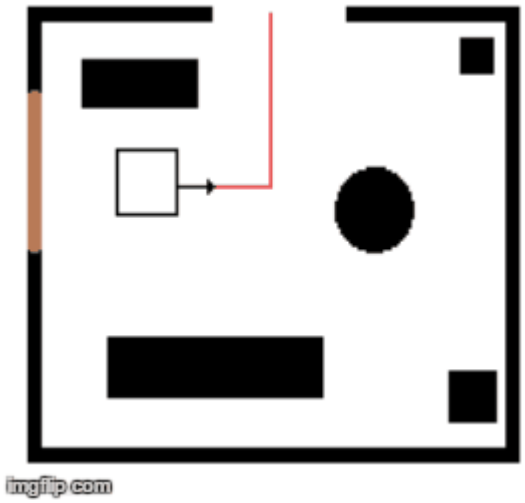


Uma vez que a orientação correta esteja definida devido à rotação realizada, podemos então iniciar a movimentação do personagem através de pequenas translações do objeto percorrendo a linha vermelha, até que uma nova rotação seja necessária.

Para gerar uma animação adequada, as translações, que serão feitas a cada frame, deverão ser de uma magnitude adequada para que não haja pulos, criando assim uma sensação maior de fluidez do movimento.

Então utilizamos rotações para orientar corretamente nosso personagem e translações para movê-lo. Essas ações seriam suficientes? Provavelmente não! Ainda falta passar ao jogador a sensação de que o personagem está vivo e se movendo de fato. Uma maneira de fazer isso, que funciona bem para os jogos 2D com visão top-down, é a utilização da escala do objeto para dar a ideia de movimento. Observe o GIF na Figura 19:

Figura 19 - Escala do personagem para dar a ideia de movimento.



Perceba que a única modificação que está sendo feita no personagem para passar a ideia de que ele está “vivo” ou “respirando” é a utilização da escala. Essa técnica é comum em animações e, apesar de não ser uma obra de arte, passa a ideia necessária. Você já ouviu falar em *programmers art*? Quem sabe essa é uma boa hora para buscar mais informações sobre isso!

Assim, concluímos a nossa aplicação dos conteúdos vistos! É importante entender que a utilização de transformações adequadamente é a base para muitas partes de um jogo.

Resumo

Nesta aula vimos o conceito de transformação e seu significado geométrico. Discutimos o processo adequado para avaliar que tipo de transformação uma dada matriz representa. Aprendemos como efetuar rotações, transformações de escala e translações separadamente e como combinar essas três transformações em uma única matriz. Por fim, vimos um pouco do que podemos fazer com essas transformações no mundo dos jogos digitais.

Autoavaliação

Para que avalie o seu aprendizado após estudar esta aula, você deve se fazer os questionamentos a seguir:

01) - Eu entendo o que são transformações?

02) - Dada uma matriz, sei avaliar que tipo de transformação ela realiza?

03) - Entendo o conceito de transformação linear e sei diferenciar uma transformação linear de uma transformação afim?

04) - Sou capaz de construir a matriz que realiza uma rotação em torno da origem?

05) - Sou capaz de construir uma matriz de escala?

06) - Compreendo o conceito de translação como uma soma de vetores?

07) - Sou capaz de encontrar uma matriz que possa representar, através de um produto, uma translação?

08) - Consigo combinar várias transformações em uma única matriz?

09) - Entendo de que maneira essas transformações são utilizadas no desenvolvimento de jogos?

Referências

DUNN, Fletcher; PARBERRY, Ian. **3D math primer for graphics and game development**. CRC Press, 2011.

FLYNT, John P.; KODICEK, Danny. **Mathematics and Physics for programmers**. Course Technology PTR, 2012.

TREMBLAY, Christopher. **Mathematics for game developers**. 2004.