

Matemática Aplicada a jogos

Aula 04 - Vetores, Operações e suas Interpretações Geométricas

Apresentação

Tudo o que podemos medir pode ser matematicamente representado por uma *grandeza*. Grandezas podem ser subdivididas em dois tipos essenciais: escalares e vetoriais.

Antes que tudo comece a parecer muito complicado é importante que fique claro: em grandezas escalares nós já estamos bem adiantados! Uma grandeza escalar é aquela que pode ser descrita de maneira precisa e correta apenas por um número e uma unidade. Por exemplo, se eu digo que tenho 1,63m de altura, essa informação está completa.

Algumas grandezas necessitam de mais que um número e uma unidade para serem descritas de maneira precisa. A velocidade é uma dessas grandezas. Se eu digo que estou me deslocando a 50km/h, perguntas como “em que direção?” ou “em que sentido?” podem surgir. Dizemos que grandezas desse tipo são grandezas vetoriais.

Uma grandeza escalar está associada a um número que chamamos simplesmente de escalar, ou seja, um número real como os que já estamos acostumados a trabalhar.

Uma grandeza vetorial precisa de uma representação matemática diferenciada. Para essa representação utilizamos objetos conhecidos como *vetores*, cujas propriedades e características estudaremos ao longo desta aula.

Objetivos

Ao final dessa aula você deverá ser capaz de:

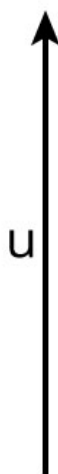
- Dominar o conceito de vetor;
- Realizar operações de soma e subtração entre vetores;
- Calcular produtos envolvendo vetores;
- Compreender o significado geométrico de cada operação apresentada e como elas podem ser utilizadas no desenvolvimento de jogos digitais.

1. O que é um vetor?

O conceito de vetor encontrado nos livros de matemática, especialmente nos livros de Álgebra Linear no ensino superior, é um conceito bastante abstrato descrito através de propriedades que esses objetos possuem. O nosso objetivo nesta aula é nos ater a interpretação geométrica que podemos atribuir a esses objetos abstratos. Diremos, então, que um vetor é uma lista de instruções que nos dá uma *direção*, um *sentido* e uma *intensidade*.

Representamos um vetor, como mostrado na Figura 1, por uma seta. O que chamamos de *direção* do vetor pode ser descrito como a reta sobre a qual ele está posicionado. Já a ponta da seta nos indica o seu *sentido*. Por fim, sua intensidade é representada pelo comprimento da seta.

Figura 01 - Representação de um vetor



Podemos dizer que o vetor da Figura 1 tem direção vertical, sentido de baixo para cima e intensidade igual ao comprimento da seta que o representa.

Se posicionarmos o início da seta que representa esse vetor na origem do plano cartesiano, as coordenadas cartesianas do ponto onde a seta termina nos darão a representação algébrica do vetor. Na Figura 2 logo mais abaixo, por exemplo, as coordenadas do ponto B representam o vetor. Utilizaremos a seguinte notação para representar o vetor $\vec{u}$:

$$\vec{u} = [1.44 \ 1.7],$$

onde os números 1.44 e 1.7 são as componentes do vetor. Existem outras maneiras de representá-los, inclusive com as componentes apresentadas na vertical, como abaixo:

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1.44 \\ 1.7 \end{bmatrix},$$

ou ainda como um simples par ordenado:

$$\vec{u} = (1.44, 1.7).$$

Quando representamos o vetor com suas componentes na horizontal, podemos nos referir a ele como *vetor linha*. Com as componentes na vertical podemos chamá-lo de *vetor coluna*.

Algumas notações importantes

Utilizamos letras minúsculas para representar números (escalares):

$$a = 2 \text{ e } x = 5$$

Utilizamos letras maiúsculas para representar pontos:

$$A = (a_x, a_y)$$

Utilizamos letras minúsculas com uma pequena seta para representar vetores:

$$\vec{u} = [1.44 \ 1.7]$$

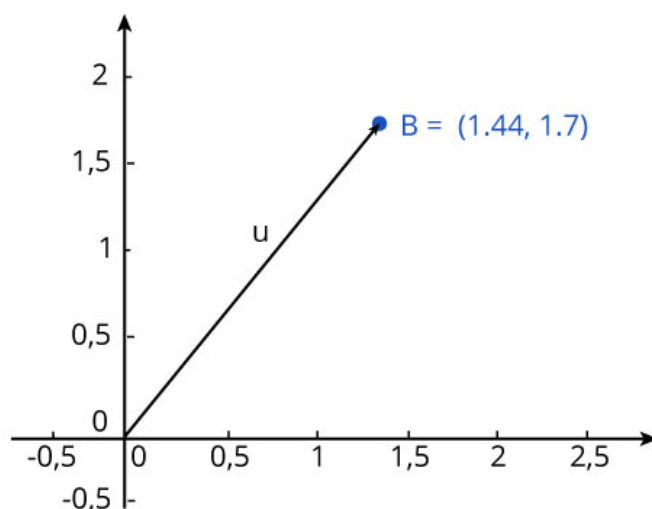
Em alguns contextos os vetores podem também ser representados com letra minúscula em negrito:

$$\mathbf{u} = [1.44 \ 1.7]$$

A utilização correta dessas notações é muito importante para não gerar ambiguidades. Como um vetor e um ponto podem ser representados da mesma forma, muitas vezes o que definirá qual objeto está representado é a notação utilizada para representá-lo.

$B = (1.44, 1.7)$ é um ponto no plano cartesiano enquanto $\vec{u} = (1.44, 1.7)$ é um vetor no plano.

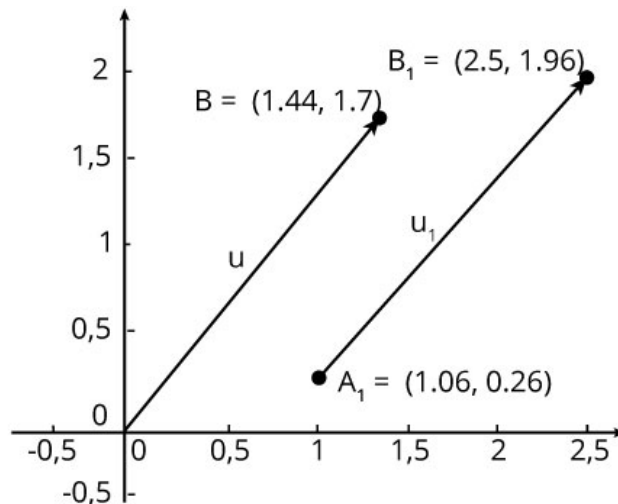
Figura 02 - Vetor $\vec{u} = (1.44, 1.7)$ e ponto $B = (1.44, 1.7)$



Um fato muito importante sobre os vetores é que eles não estão associados a uma posição fixa no plano. As coordenadas do ponto B são suficientes para designar um vetor com a intensidade, direção e sentido do vetor $\vec{u}$, independentemente de onde ele está posicionado.

Na Figura 3, o vetor $\vec{u_1}$ é uma réplica do vetor $\vec{u}$ posicionada fora da origem. Para encontrar a representação do vetor $\vec{u_1}$ é necessário subtrair das coordenadas do ponto B_1 as coordenadas do ponto A_1 .

Figura 03



Temos, então, que

$$\vec{u}_1 = (2.5 - 1.06, 1.96 - 0.26) = (1.44, 1.7)$$

Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{u}_1$ têm a mesma direção, apontam no mesmo sentido e possuem a mesma intensidade e, por esses motivos, possuem a mesma representação. Na Figura 3 eles estão apenas representados em locais distintos, mas, na essência, são exatamente o mesmo vetor.

Em física, os vetores são largamente utilizados para representar grandezas. A força, por exemplo, é uma grandeza vetorial, assim como a velocidade. Ela exige a especificação de uma intensidade, uma direção e um sentido para estar completamente descrita.

3. Intensidade e Dimensão de um vetor

Até aqui já vimos como representamos um vetor e que a sua intensidade é o seu comprimento. Será, então, que somos capazes de calcular a intensidade de um vetor $\vec{u} = (a, b)$?

Vimos que, se posicionarmos o vetor $\vec{u} = (a, b)$ na origem, o ponto $B = (a, b)$ marca o final do vetor, ou seja, a ponta da seta que o representa. Para calcular a intensidade do vetor $\vec{u}$ basta calcular o comprimento do segmento de reta que liga

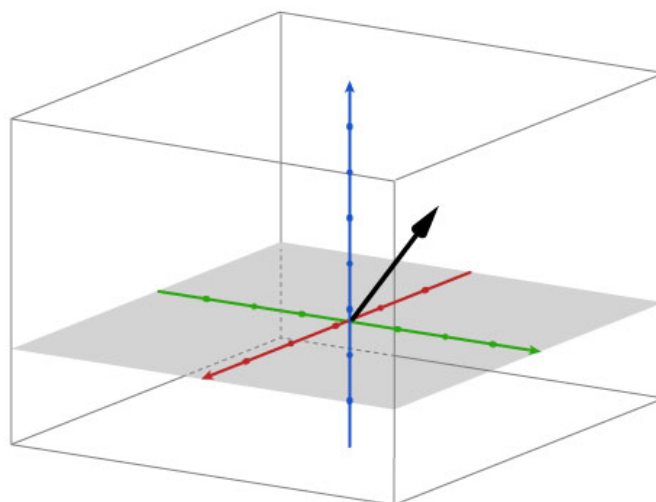
os pontos $(0,0)$ e (a,b) , que é a distância entre $(0,0)$ e (a,b) . E isso nós aprendemos a fazer na Aula 01!

Representaremos a intensidade do vetor $\vec{u}$ com o símbolo $||\vec{u}||$ e chamaremos esse número, que é um escalar, de norma ou módulo do vetor $\vec{u}$. Assim, a norma (ou módulo, ou intensidade) do vetor $\vec{u}$ é

$$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Percebam que estamos falando nesta aula de vetores com duas componentes. Contudo, a estrutura vetor tem um significado muito mais abrangente do que o abordado aqui. Um vetor pode ter um número n qualquer de componentes e até mesmo infinitas! Podemos, por exemplo, sair do plano cartesiano e adentrarmos no espaço de três dimensões (orientado por três retas e não mais por duas como o plano). Cada ponto nesse espaço 3D pode ser associado a um vetor analogamente ao que fazemos no plano, como mostra a Figura 4.

Figura 04 - Vetor em 3D



Ao número de componentes de um vetor damos o nome de dimensão do vetor. Nos limitaremos ao estudo de **vetores de dimensão 2** (vetores 2D), que são os vetores que “moram” no plano.

1.1 Deslocamento x Distância



A frase na placa acima tem um significado válido, independentemente de qual é sua localização inicial. Ela te dá uma magnitude (200m), uma direção e um sentido e por isso pode ser expressa por um vetor. Chamamos essa grandeza vetorial de *deslocamento*.

A intensidade do vetor deslocamento, por sua vez, é uma grandeza escalar que chamamos de distância.

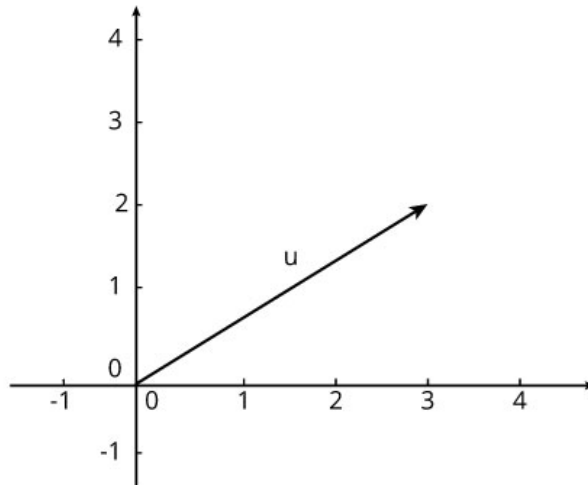
Qualquer vetor de dimensão dois pode ser interpretado como um deslocamento feito em dois passos: no primeiro passo desloca-se paralelamente ao eixo horizontal e no segundo passo desloca-se paralelamente ao eixo vertical.

Para ilustrar melhor essa analogia vamos pensar no vetor $\vec{u} = (3, 2)$ da Figura 5. Podemos ver o vetor $\vec{u}$ como um deslocamento de magnitude $||\vec{u}||$. Encontremos então esse valor.

$$||\vec{u}|| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

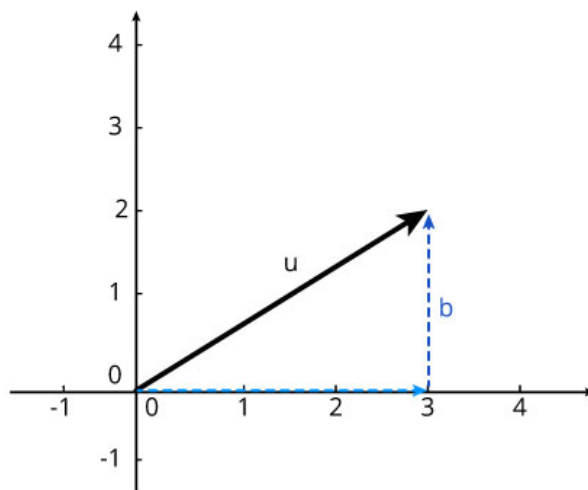
O deslocamento que $\vec{u}$ representa é, então, na direção e sentido da seta da Figura 5 e tem a magnitude igual a $\sqrt{13}$.

Figura 05 - Vetor $\vec{u} = (3, 2)$



Para efetuar um deslocamento na direção de $\vec{u}$ podemos primeiro efetuar um deslocamento de 3 unidades na direção do eixo x e depois um deslocamento de 2 unidades na direção paralela ao eixo y , como na Figura 6.

Figura 06 - Deslocamento do vetor $\vec{u}$ em dois passos



Essa abordagem nos permitirá ter uma melhor compreensão da interpretação geométrica do resultado das operações com vetores que veremos na próxima seção.

2. Operações com vetores

Assim como as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão são de importância conhecida por nós entre escalares, também podemos definir algumas operações entre vetores ou entre um vetor e um escalar. Nesta seção introduziremos as operações mais importantes que envolvem vetores.

É importante notar que a natureza de vetores e escalares é diferente. No entanto, assim como em determinados contextos é possível resolver problemas e dar interpretações palpáveis às operações entre escalares, com vetores não será diferente.

Abordaremos os aspectos algébricos de cada operação, bem como sua interpretação geométrica.

2.1 Produto de um escalar por um vetor

A operação produto de um vetor $\vec{u} = (a, b)$ por um escalar k é definido como

$$k\vec{u} = (ka, kb),$$

onde ka e kb são produtos entre escalares com os quais já estamos habituados.

Se $\vec{u} = (-1, 2)$ e $k = 2$, temos

$$k\vec{u} = (2(-1), 2 \cdot 2) = (-2, 4).$$

Atividades

Encontre o vetor $k\vec{u}$ para cada escalar k e vetor $\vec{u}$ dado abaixo:

a) $\vec{u} = (1, 3)$ e $k = 1$

b) $\vec{u} = (-1, 1)$ e $k = -1$

c) $\vec{u} = (2, 1)$ e $k = 3$

Ao realizarmos o produto de um vetor $\vec{u}$ por um escalar obteremos como resultado um vetor com a mesma direção de $\vec{u}$.

O sentido do vetor $k\vec{u}$ dependerá do sinal do escalar k . Se k for positivo, $k\vec{u}$ terá o mesmo sentido de $\vec{u}$. Se k for negativo, $k\vec{u}$ terá sentido contrário ao de $\vec{u}$, ou seja, apontará no sentido oposto.

A norma do vetor $k\vec{u}$ depende do valor absoluto de k . Vamos calcular a norma desse vetor?

$$\begin{aligned} ||k\vec{u}|| &= \sqrt{(ka)^2 + (kb)^2} \\ &= \sqrt{k^2 a^2 + k^2 b^2} \\ &= \sqrt{k^2 (a^2 + b^2)} \\ &= |k| \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

onde $|k|$ é o valor absoluto ou módulo do escalar k .

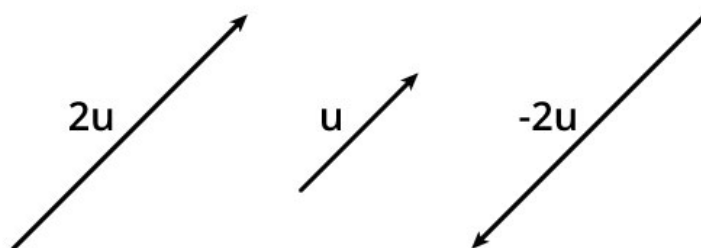
Então

$$||k\vec{u}|| = |k| \sqrt{a^2 + b^2} = |k| \cdot ||\vec{u}||$$

ou seja, a norma do vetor $k\vec{u}$ é o produto do valor absoluto de k pela norma do vetor $\vec{u}$.

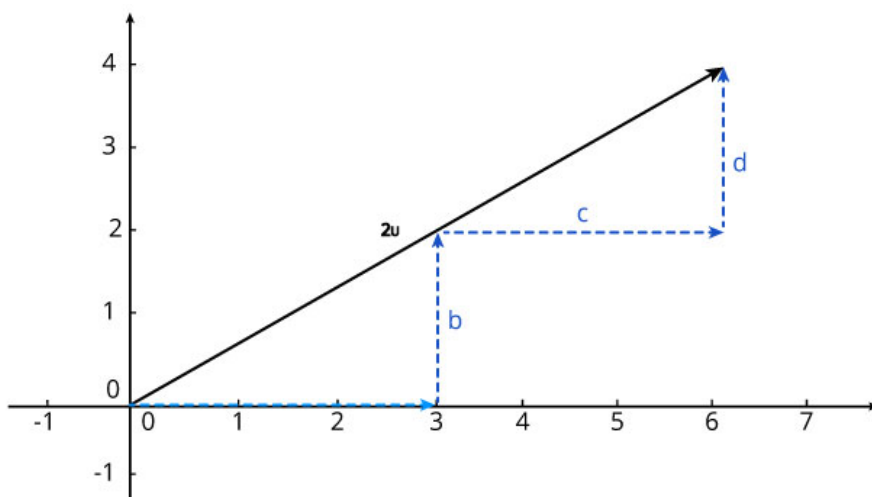
A Figura 7 mostra a interpretação geométrica do que foi discutido acima.

Figura 07



Se pensarmos no vetor como um deslocamento, o produto de um vetor por um escalar k seria realizar aquele deslocamento k vezes (quando k é um número inteiro). Veja na Figura 8 como realizamos duas vezes o deslocamento do vetor $\vec{u} = (3, 2)$ da [Figura 6](#).

Figura 08



Atividade

Calcule a norma do vetor $\vec{u} = (3, 2)$. Depois encontre o vetor $k\vec{u}$ onde $k = 4$ e calcule sua norma. Por fim, calcule o produto $|k||\vec{u}|$ e compare os resultados.

7. Vetor nulo, vetor unitário e inverso aditivo

A operação produto de um vetor por um escalar gera alguns vetores importantes sobre os quais vale a pena falar um pouco: o vetor nulo, o vetor unitário e o vetor $-\vec{u}$

O vetor cujas componentes são todas iguais a zero é chamado de vetor nulo. Ele é o resultado do produto

$$0 \cdot \vec{u}$$

produto do escalar 0 por qualquer vetor $\vec{u}$ de acordo com a definição que foi dada para essa operação.

O vetor nulo é o único que possui intensidade, ou norma, igual a zero. Todos os outros vetores possuem normas positivas. Além disso, o vetor nulo não possui um sentido definido. Geometricamente ele é representado no plano apenas por um ponto e não por uma seta, uma vez que não possui um sentido. Esse vetor é o elemento neutro das operações de soma e subtração que veremos a seguir.

Para todo vetor $\vec{u}$ diferente do vetor nulo é possível encontrar um vetor que possui norma igual a um e tem mesma direção e sentido que $\vec{u}$. Para isso basta lembrar que a norma do vetor $k\vec{u}$ é dada pela expressão

$$|k| \cdot \|\vec{u}\|$$

Se considerarmos o vetor $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$, sua norma será igual a um pela equação acima. Pelas propriedades do produto de um escalar por um vetor, sabemos que o vetor $\frac{1}{\|\vec{u}\|}\vec{u}$ terá direção e sentido iguais aos de $\vec{u}$. Chamamos esse vetor de *vetor unitário*.

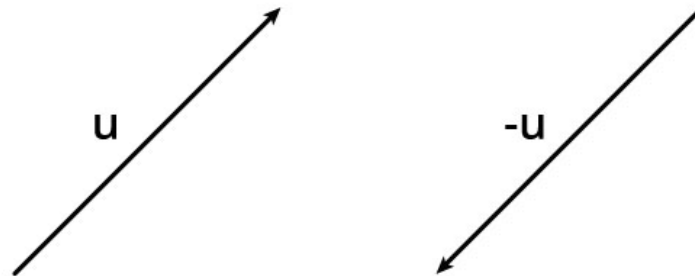
Na verdade chamamos de vetor unitário qualquer vetor que tenha norma um. O que acabamos de mostrar é que, dado um vetor $\vec{u}$ diferente do vetor nulo, é possível encontrar um vetor unitário com mesma direção e sentido de $\vec{u}$.

Por fim, chamamos de $-\vec{u}$ o vetor que obtemos do produto

$$-1 \cdot \vec{u}.$$

Esse vetor possui a mesma intensidade (norma) de $\vec{u}$, mas aponta no sentido oposto desse vetor, como podemos ver na Figura 9.

Figura 09 - Vetores $\vec{u}$ e $-\vec{u}$



O vetor $-\vec{u}$ é o elemento simétrico ou inverso do vetor $\vec{u}$ na operação de soma que definiremos a seguir.

2.2 Soma de vetores

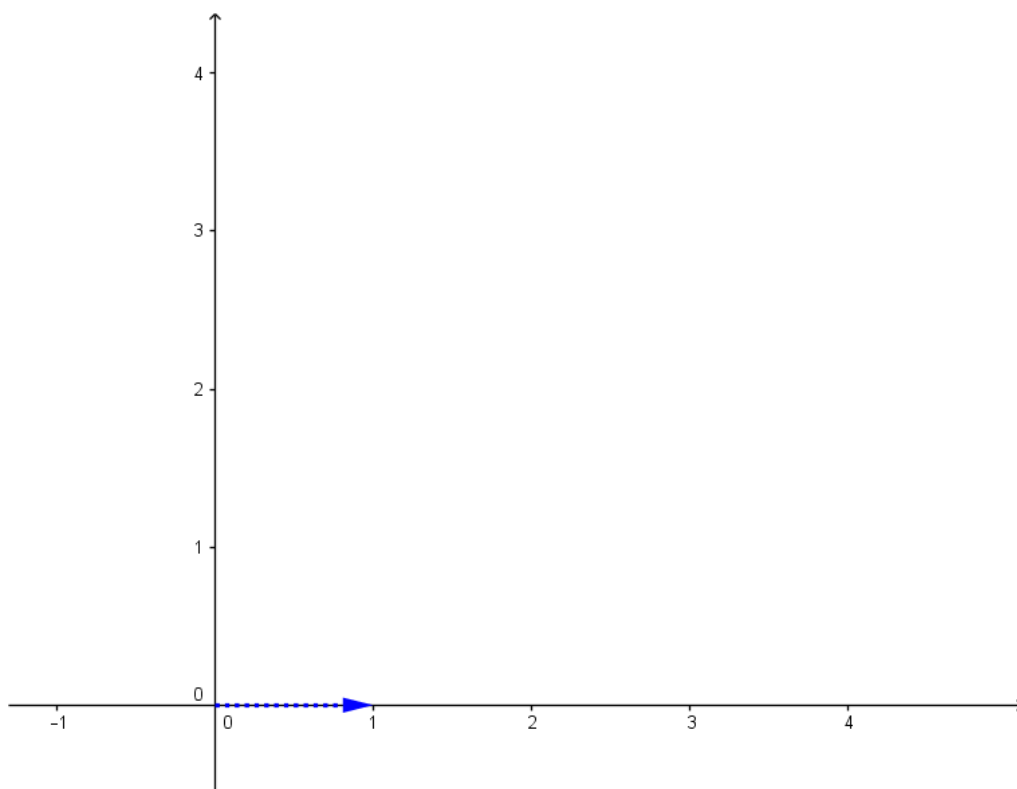
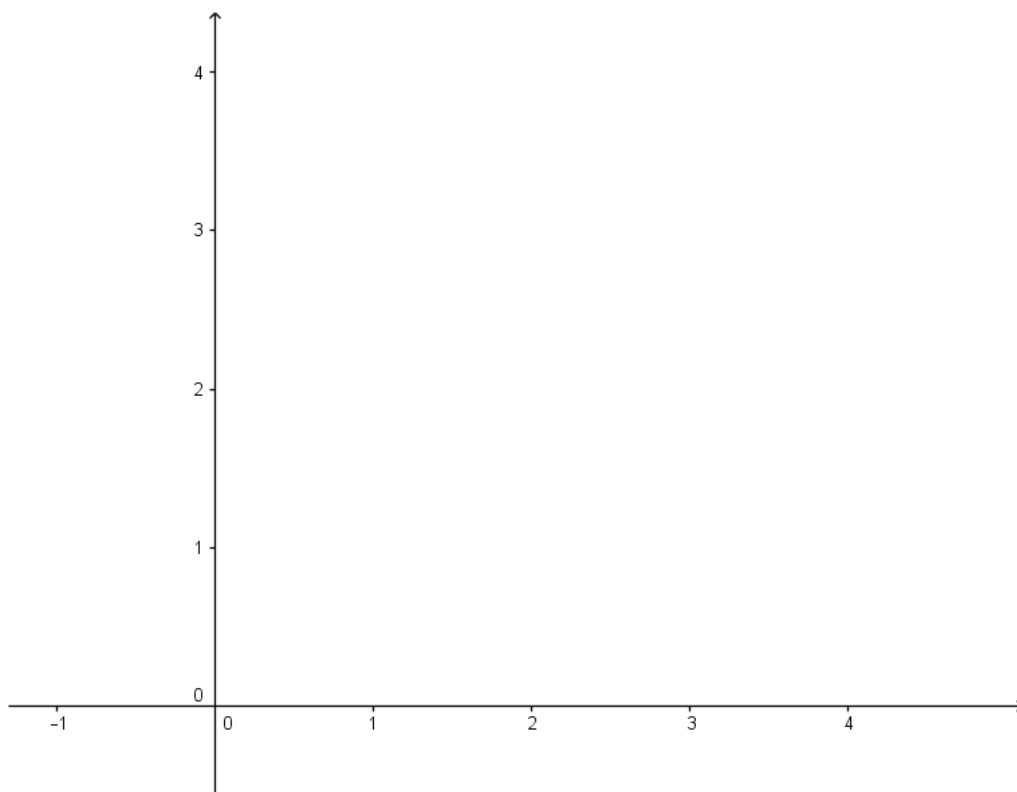
A soma de um vetor $\vec{u} = (a_1, b_1)$ com um vetor $\vec{v} = (a_2, b_2)$ é definida por

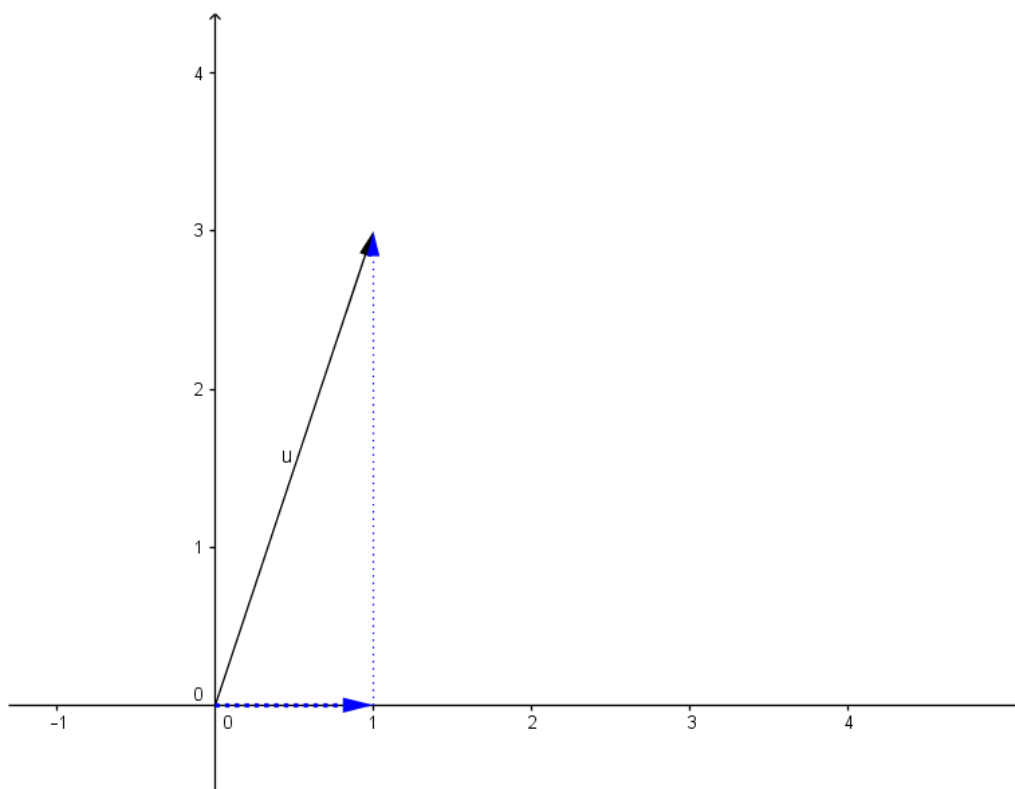
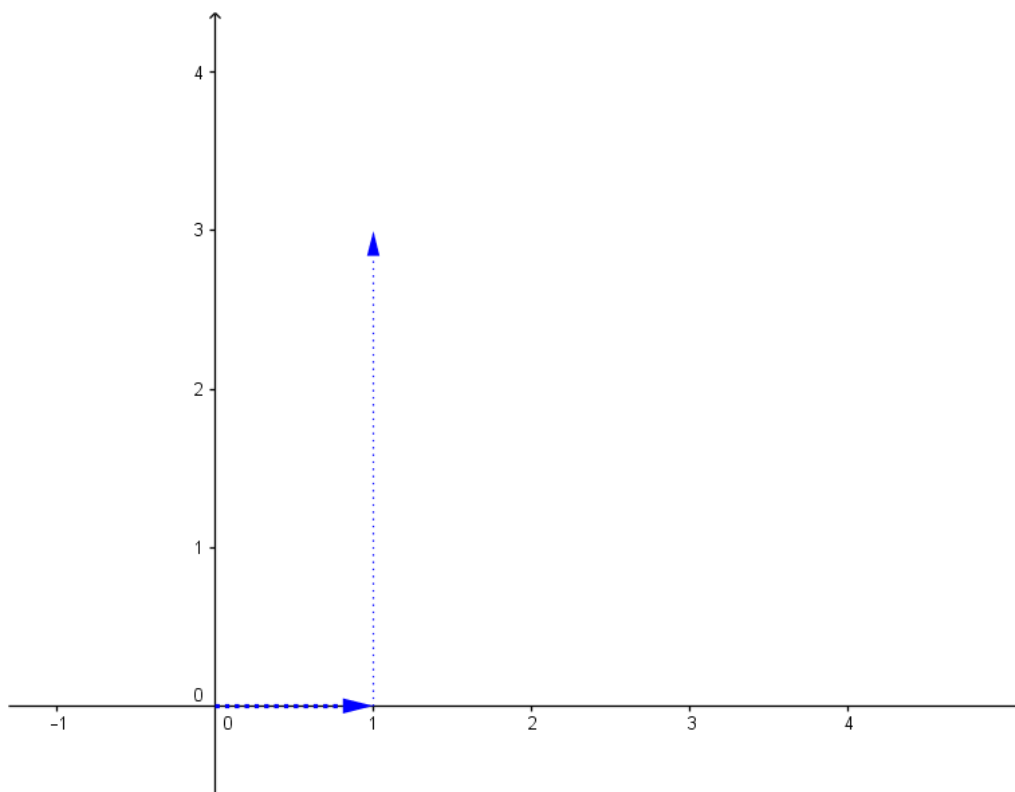
$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

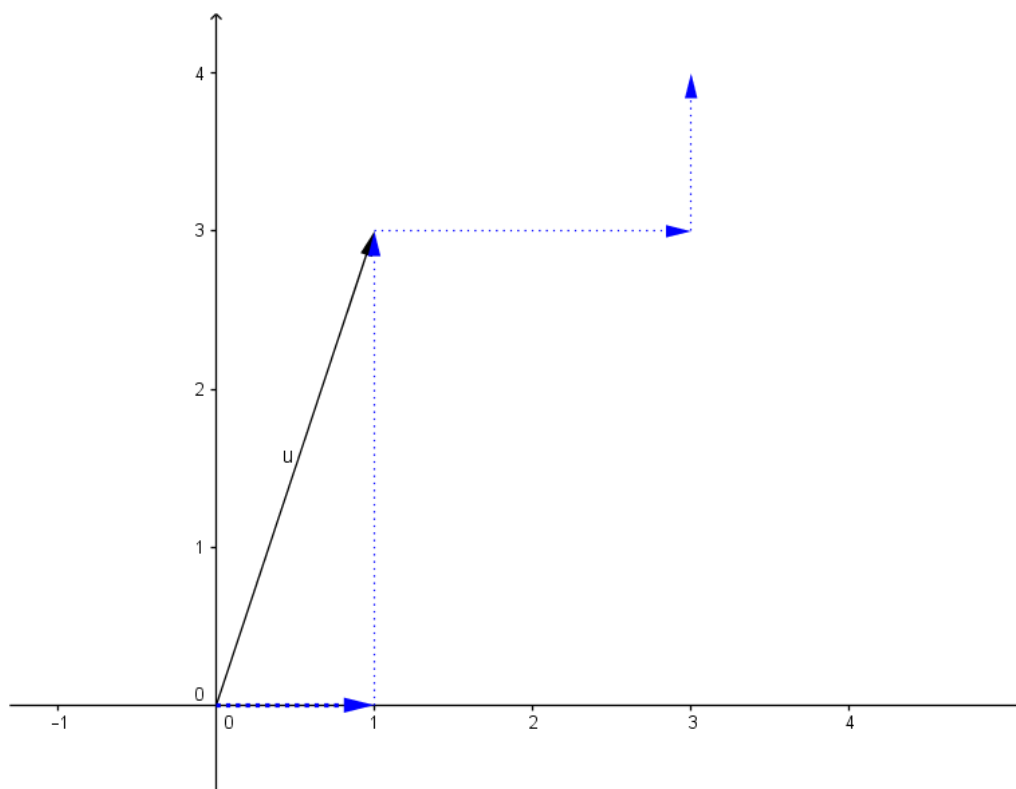
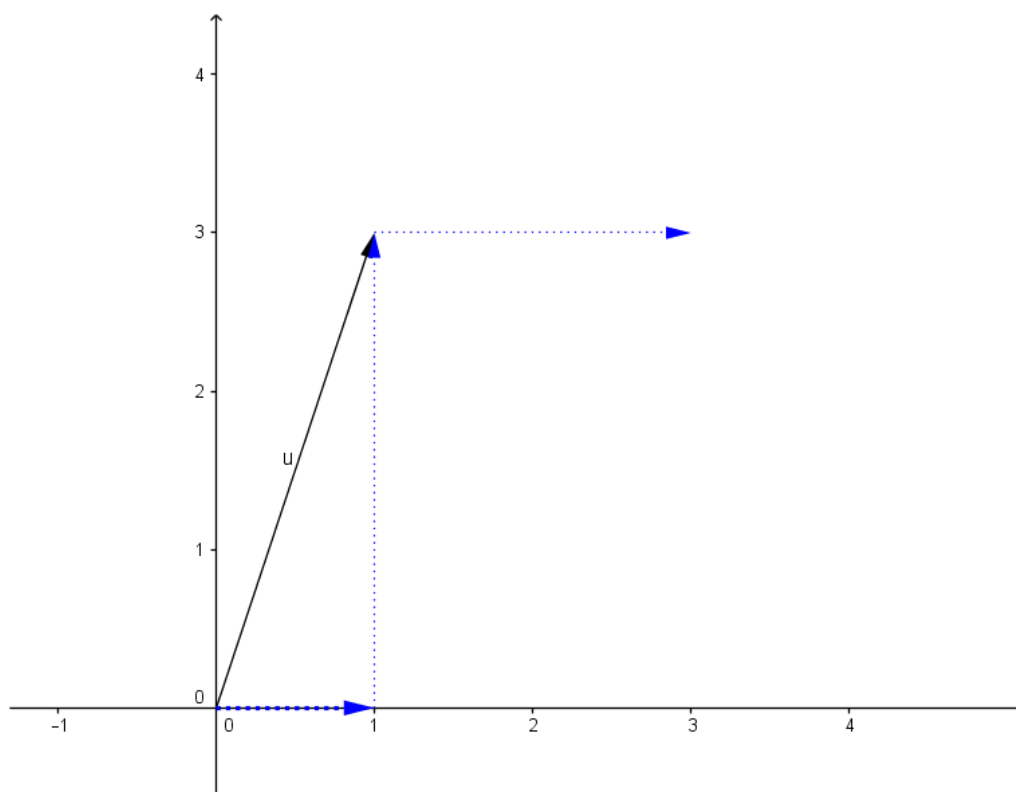
Note que o símbolo utilizado para a soma de vetores e de escalares é o mesmo, o sinal de +. Além disso, a soma que aparece nos parênteses é uma soma de escalares, com a qual estamos acostumados a trabalhar.

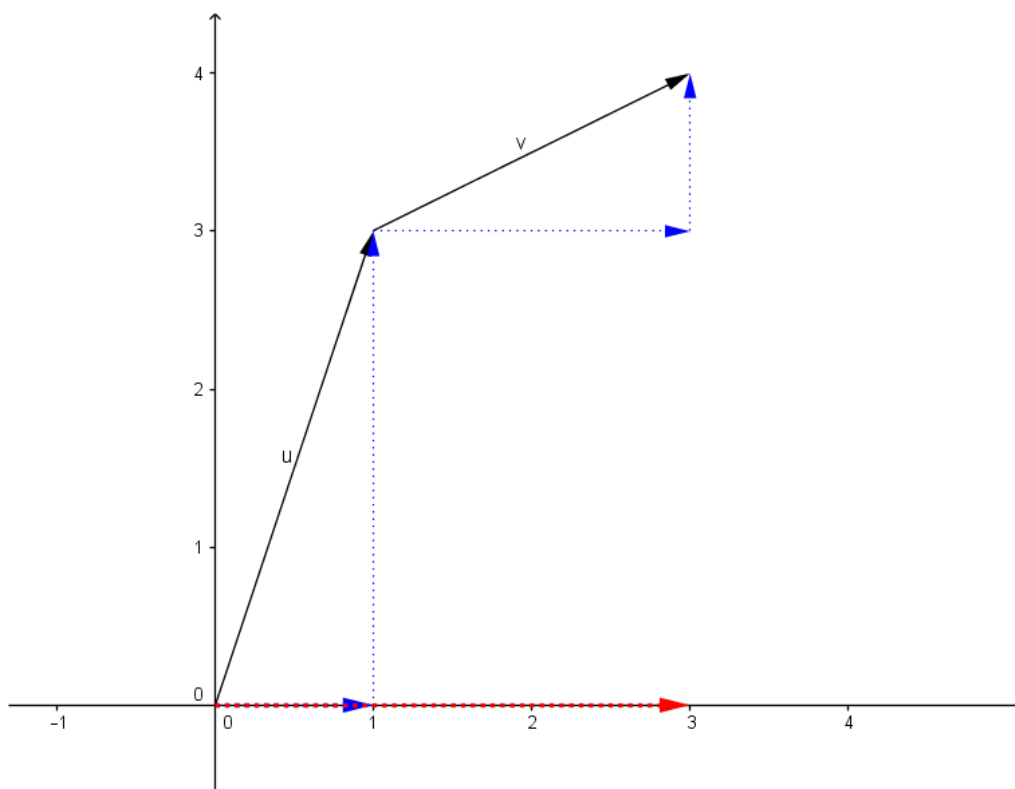
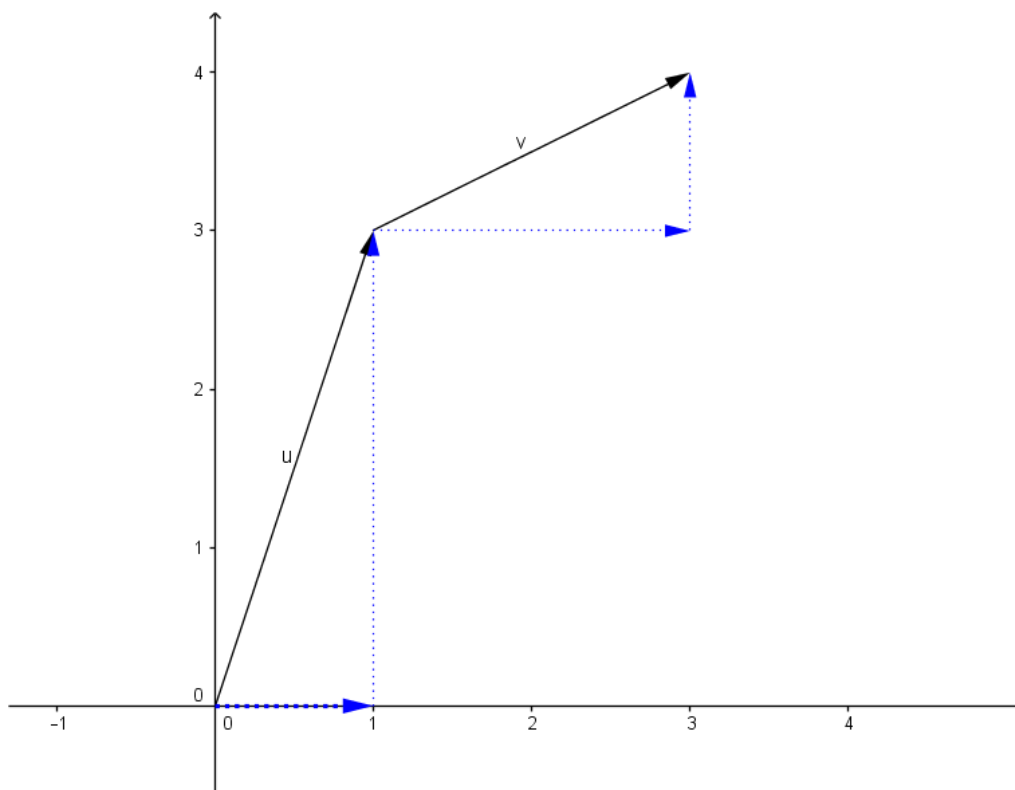
Para entendermos bem o significado geométrico da soma de dois vetores devemos encará-los como uma sequência de deslocamentos. Considere, por exemplo, os dois vetores $\vec{v} = (1, 3)$ e $\vec{u} = (2, 1)$. A soma desses dois vetores será o vetor $\vec{v} + \vec{u} = (1 + 2, 3 + 1) = (3, 4)$.

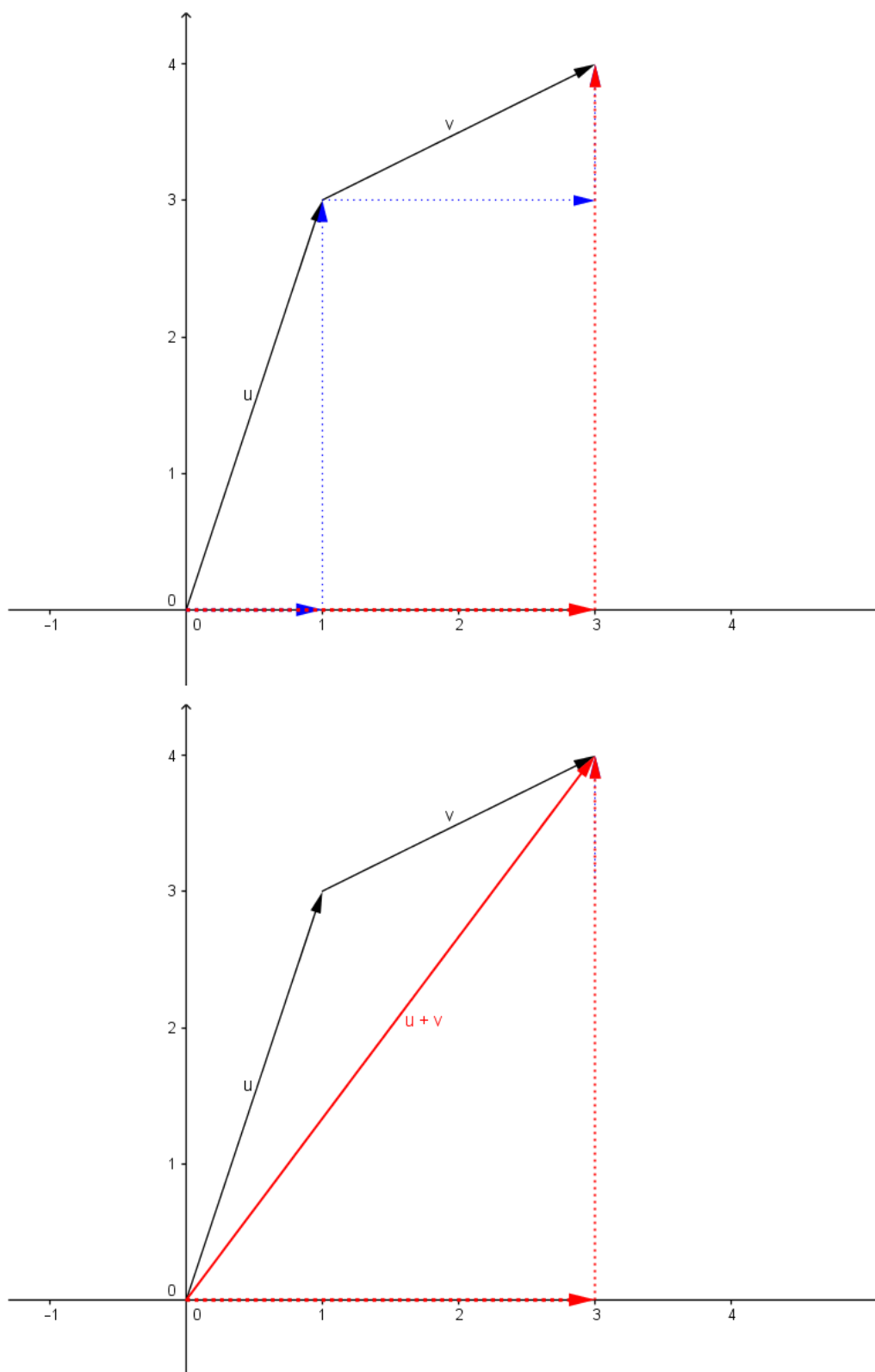
Para somar os deslocamentos podemos posicionar uma seta na ponta da outra, e assim obter o vetor soma, como mostrado abaixo:





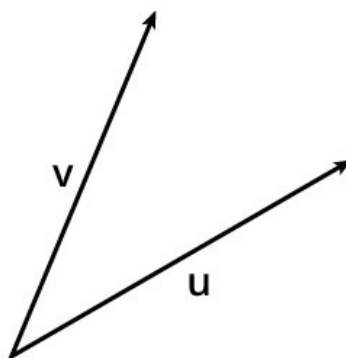






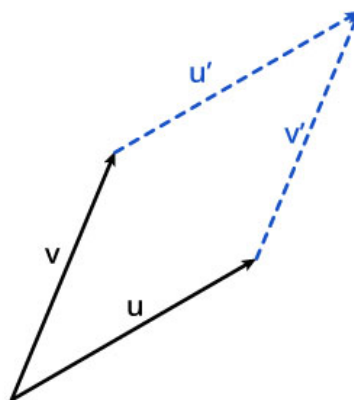
Outra maneira de enxergar geometricamente o vetor soma é posicionando as duas setas a partir de um mesmo ponto, como na Figura 10.

Figura 10



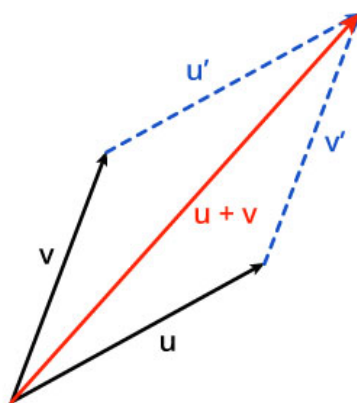
Dessa forma, o início da seta que representa o vetor soma ficará no ponto de partida de ambos os vetores que estão sendo somados. Para encontrar o local exato da ponta da seta utilizamos a chamada *regra do paralelogramo*, que consiste em traçar cópias dos vetores u e v formando um paralelogramo, como mostrado na Figura 11.

Figura 11 - Regra do paralelogramo



Após desenhado o paralelogramo, basta agora posicionar a seta que representa a soma dos vetores. Essa seta deve terminar no vértice do paralelogramo que é oposto ao ponto de partida dos vetores. Veja a Figura 12.

Figura 12



2.3 Subtração de vetores

Agora que sabemos como somar dois vetores e entendemos a representação geométrica dessa soma, podemos falar de uma outra operação entre vetores de natureza muito semelhante: a subtração!

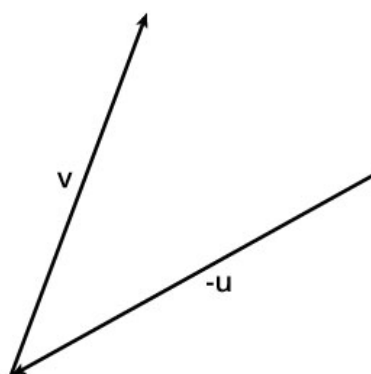
A subtração entre os vetores $\vec{u} = (a_1, b_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2)$ é definida por

$$\vec{u} - \vec{v} = (a_1 - a_2, b_1 - b_2)$$

A subtração pode também ser vista como a soma do vetor $\vec{u}$ com o vetor $-\vec{v}$. Interpretada desse modo a subtração herda a interpretação geométrica da soma.

Usando os mesmos vetores do exemplo anterior, como seria o vetor $\vec{v} - \vec{u}$?

Figura 13

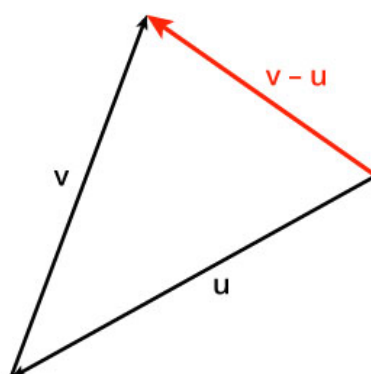


A Figura 13 mostra a representação dos vetores $\vec{v}$ e $-\vec{u}$. Basta, então, analisar como seria o vetor soma dos dois.

Vimos que podemos interpretar a soma de dois vetores como uma sequência de deslocamentos. Dessa forma, o vetor soma tem início no começo da seta do primeiro vetor e final na ponta da seta do segundo. Vale destacar o fato de que, na soma, a ordem dos vetores não altera o resultado. O mesmo **NÃO** ocorre com a subtração.

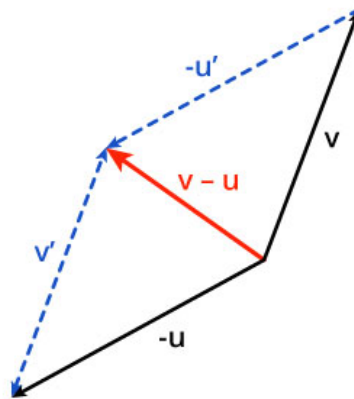
O vetor que resulta da subtração $\vec{v} - \vec{u}$ pode ser observado na Figura 14.

Figura 14 - Subtração de vetores



Se aplicarmos aqui a regra do paralelogramo iremos obter exatamente o mesmo vetor. Veja a Figura 15.

Figura 15 - Regra do paralelogramo para subtração



2.4 Produtos entre dois vetores

Na seção 2.1 vimos que é possível multiplicar um vetor por um escalar. Nesta seção veremos dois produtos que são realizados entre vetores: o produto escalar ou **dot** e o produto vetorial ou **cross**.

O produto escalar entre dois vetores, como sugere seu nome, resulta em um número escalar, enquanto o produto vetorial resulta em um vetor. A seguir definiremos essas duas operações e discutiremos suas interpretações geométricas.

2.4.1 Produto escalar

O produto escalar está presente em vários momentos na programação de jogos digitais e é útil desde o processamento gráfico até a inteligência artificial. É chamado também de produto interno ou **dot product**, sendo esse último devido ao símbolo que utilizamos para identificá-lo: um ponto entre os vetores.

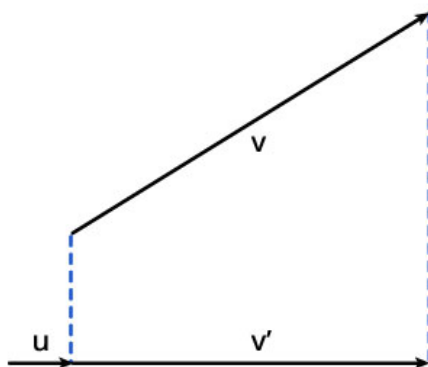
O produto escalar entre dois vetores $\vec{u} = (a_1, b_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2)$ é definido como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Para essa operação discutiremos duas interpretações geométricas. Na primeira delas consideraremos o produto escalar como sendo uma projeção, ou sombra, de um vetor sobre o outro.

Suponha que o vetor $\vec{u}$ é um vetor unitário e o vetor $\vec{v}$ é um vetor de norma qualquer. O produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ resulta no tamanho da projeção do vetor $\vec{v}$ sobre a reta que tem a direção do vetor $\vec{u}$

Figura 16 - $\vec{v'}$ é a projeção de $\vec{v}$ sobre a reta que tem a mesma direção do vetor $\vec{u}$

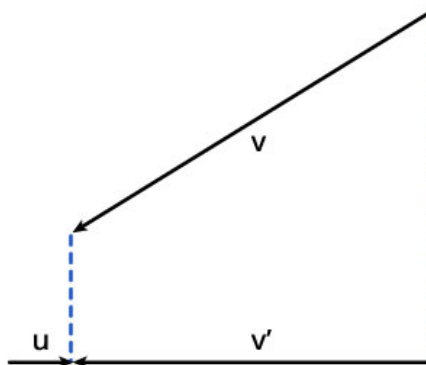


Podemos entender projeção, nesse contexto, como a sombra formada pelo vetor $\vec{v}$ sobre a reta que tem a mesma direção de $\vec{u}$ quando os raios de luz são perpendiculares a essa reta (veja as linhas pontilhadas como raios de luz!).

Nessa caso particular, então, $\vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{v'}||$.

No caso em que a projeção aponta no sentido contrário do vetor unitário $\vec{u}$ temos a situação da Figura 17.

Figura 17



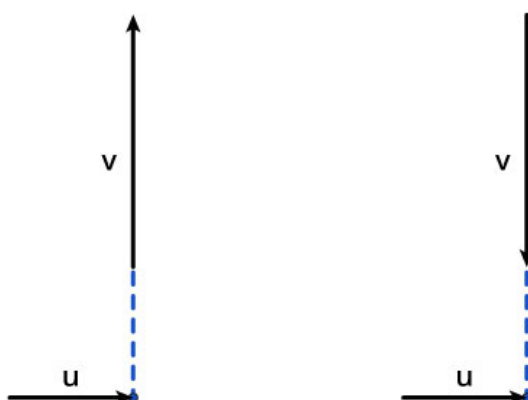
Nesse caso particular o produto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ teria valor negativo e

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -||\vec{v}'||.$$

Diante disso podemos dizer que o produto escalar de um vetor unitário $\vec{u}$ por um vetor qualquer $\vec{v}$ é o tamanho da projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$ acompanhado do sinal negativo (sinal -) caso o vetor projeção aponte no sentido oposto ao vetor $\vec{u}$.

Outro caso particular a ser considerado é o caso em que os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são perpendiculares. Nesse caso a projeção de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ será apenas um ponto e o produto escalar será igual a zero.

Figura 18 - vetores perpendiculares



O que aconteceria com a projeção de $\vec{v}$ se o multiplicarmos por um escalar k ? Vimos que, geometricamente, multiplicar um vetor por um escalar altera apenas a sua magnitude, a sua norma. Se o tamanho do vetor $\vec{v}$ aumenta, possivelmente sua projeção na direção de $\vec{u}$ aumentará.

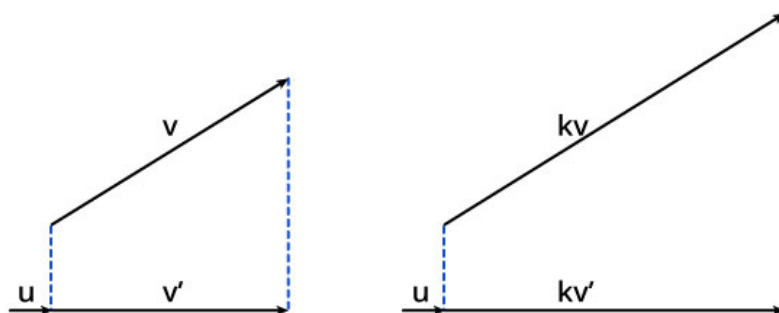
Algebricamente, se $\vec{u} = (a_1, b_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2)$ temos o seguinte:

$$\vec{u} \cdot k\vec{v} = (a_1, b_1) \cdot (ka_2, kb_2) = ka_1a_2 + kb_1b_2 = k(a_1a_2 + b_1b_2) = k(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Equação 1

Isso nos mostra que, ao multiplicar o vetor $\vec{v}$ por um escalar k , o tamanho de sua projeção também é multiplicado por k , como vemos na Figura 19.

Figura 19



Até aqui consideramos o vetor $\vec{u}$ como sendo um vetor unitário, ou seja, de norma igual a um. Para analisarmos o produto escalar de maneira mais geral, onde o vetor $\vec{u}$ tem uma norma qualquer, basta observar que multiplicar o vetor $\vec{v}$ por um escalar k tem, algebricamente, o mesmo efeito de multiplicar o vetor $\vec{u}$ por k (veja Equação 1 acima).

Note que multiplicar o vetor $\vec{u}$ por um escalar k não altera a projeção do vetor $\vec{v}$ sobre a reta na direção de $\vec{u}$. No entanto, altera o valor do produto $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

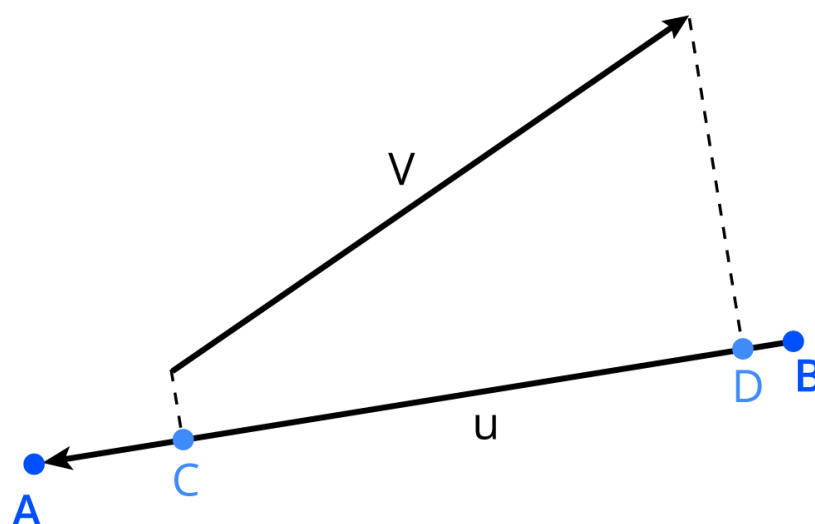
De maneira geral, o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ é igual ao comprimento da projeção de $\vec{v}$ em uma reta com a mesma direção de $\vec{u}$, multiplicado pela norma de $\vec{u}$ e acompanhado do sinal que indica se o vetor $\vec{u}$ e a projeção de $\vec{v}$ apontam no mesmo sentido.

Na Figura 20, por exemplo, o produto $\vec{u} \cdot \vec{v}$ será

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\overline{AB} \cdot \overline{CD},$$

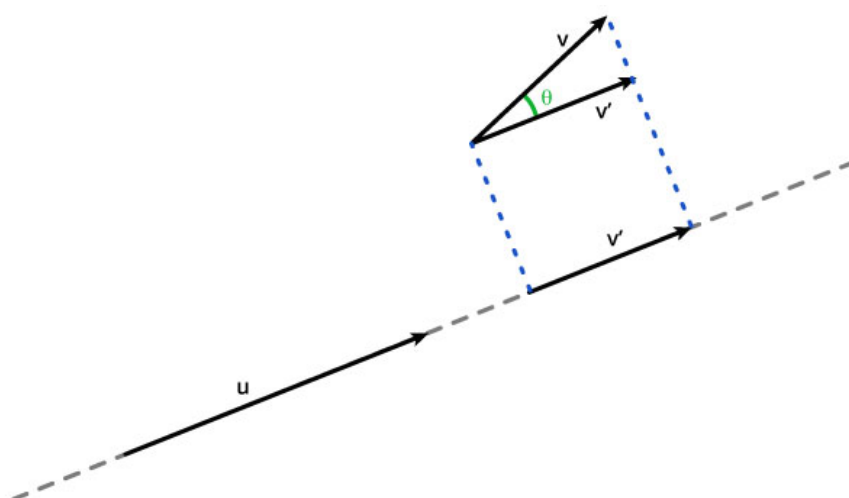
onde $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são os comprimentos dos segmentos representados na figura.

Figura 20



Conhecendo os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o ângulo entre eles é possível também calcular o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Para enxergar esse fato basta considerar o triângulo retângulo cuja hipotenusa é $\vec{v}$ e um dos catetos é $\vec{v'}$, a projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$. Veja a Figura 21.

Figura 21 - A reta tracejada é a direção do vetor $\vec{u}$



Note na Figura 21 que o ângulo formado entre $\vec{v}$ e $\vec{v'}$ é o mesmo formado entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$. Como $\vec{v}$ é conhecido, podemos encontrar sua norma. Conhecendo o ângulo θ entre $\vec{v}$ e $\vec{v'}$ é fácil calcular a norma da projeção $\vec{v'}$, pois

$$\cos\theta = \frac{||\vec{v'}||}{||\vec{v}||}$$

Ou seja,

$$||\vec{v'}|| = ||\vec{v}||\cos\theta$$

Como o produto escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pode ser visto como o produto entre a norma de $\vec{u}$ e a norma da projeção de $\vec{v}$ na direção de $\vec{u}$, podemos dizer que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \cos\theta$$

O sinal do produto interno novamente é associado ao fato do vetor $\vec{u}$ e a projeção de $\vec{v}$ apontarem no mesmo sentido (+) ou não (-).

Esse produto possui algumas propriedades fáceis de enxergar algebricamente. As enunciaremos a seguir. Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (o produto escalar é comutativo)
2. $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$
3. $\vec{u} \cdot (\vec{v} \pm \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \pm \vec{u} \cdot \vec{w}$ (o produto escalar é distributivo sobre a adição e subtração de vetores)
4. $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$ (o produto escalar é associativo sobre o produto de um escalar por um vetor)

4.1.1 Produto Vetorial

A última operação entre vetores que trataremos nesta aula é o produto vetorial. Esse produto só é definido para vetores de três dimensões, vetores que “moram” no espaço tridimensional em oposição aos vetores que “moram” no plano com os quais trabalhamos ao longo desta aula.

Além disso, o produto vetorial resulta em um vetor e não é comutativo, ao contrário do produto escalar. Este também é conhecido como **cross product** pelo símbolo que o representa: um $\times$ entre os vetores.

Definimos o produto vetorial entre $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ e $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ como

$$\vec{u} \times \vec{v} = (b_1 c_2 - c_1 b_2, c_1 a_2 - a_1 c_2, a_1 b_2 - b_1 a_2).$$

Por exemplo, se $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 3)$,

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2 \cdot 3 - 0 \cdot 1, 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 3, 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1)) = (6, -3, 3).$$

O produto vetorial é *anticomutativo*, ou seja,

$$\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$$

Vamos, então, calcular $\vec{v} \times \vec{u}$ para os vetores do primeiro exemplo:

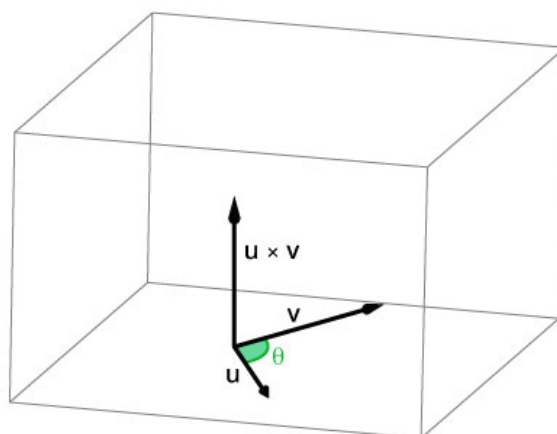
$$\vec{v} \times \vec{u} = -(6, -3, 3) = (-6, 3, -3).$$

O produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ resulta em um vetor que é perpendicular a ambos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e cuja magnitude

$$||\vec{u} \times \vec{v}|| = ||\vec{u}|| ||\vec{v}|| \sin \theta,$$

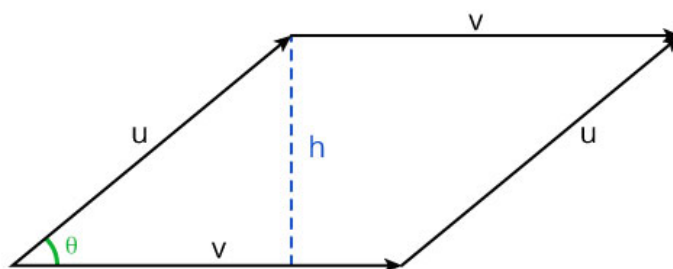
onde θ é o ângulo entre os vetores, como podemos ver na Figura 22.

Figura 22



A norma do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ resulta exatamente na área do paralelogramo formado com dois lados $\vec{u}$ e dois lados $\vec{v}$, como na Figura 23.

Figura 23 - Paralelogramo de dois lados $\vec{u}$ e dois lados $\vec{v}$



Sabemos que a área desse paralelogramo é igual à norma de $\vec{v}$ vezes h . Podemos encontrar o valor de h considerando o triângulo retângulo cuja hipotenusa é $\vec{u}$.

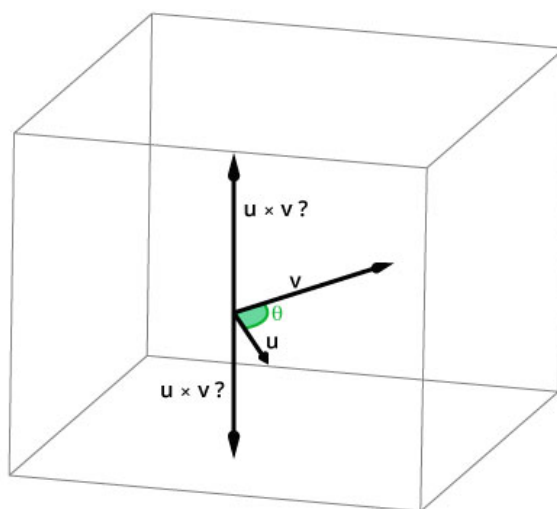
$$\text{sen}\theta = \frac{h}{\|\vec{u}\|} \Rightarrow h = \|\vec{u}\| \text{sen}\theta.$$

Então a área do paralelogramo é

$$\|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \text{sen}\theta = \|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

Ao definir produto vetorial afirmamos que o vetor resultante do produto $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$. Mas em que sentido deve apontar o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$?

Figura 24 - Os dois sentidos possíveis para o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$.

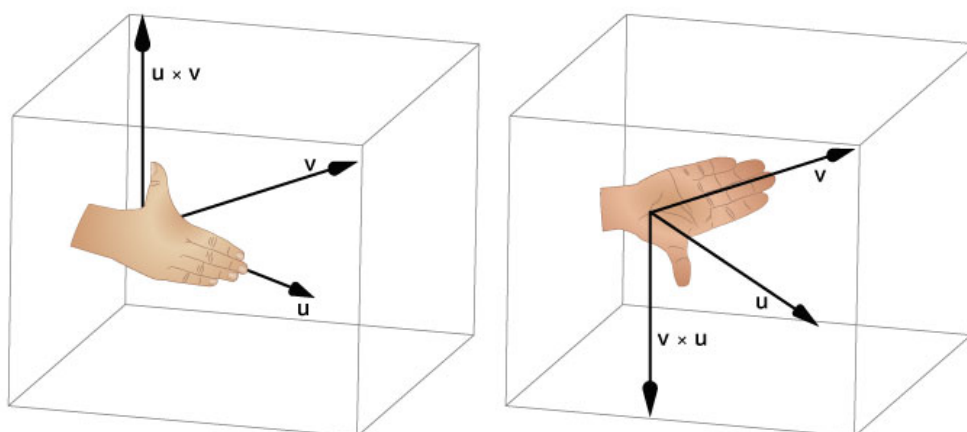


Para decidir qual o sentido do vetor resultante utilizamos a chamada [regra da mão direita](#).

A primeira coisa a se fazer é alinhar os dois vetores u e v partindo do mesmo ponto, como na Figura 24.

A seguir, alinhe sua mão direita na direção do vetor u com as pontas dos dedos voltadas para o sentido em que aponta o vetor $\vec{u}$ e a palma da mão como se dela saísse o vetor $\vec{v}$. O seu polegar estará apontando no sentido do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$. Veja a Figura 25.

Figura 25 - regra da mão direita



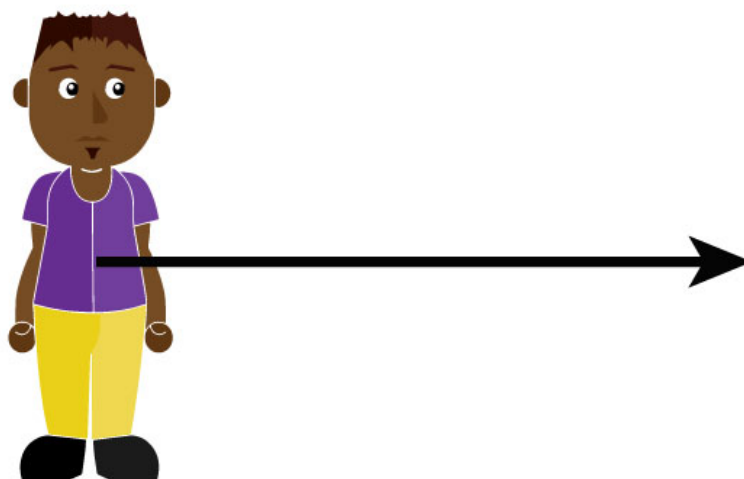
Lembre-se de usar sempre a mão direita! Caso contrário, você encontrará um vetor que aponta no sentido oposto ao sentido correto.

3. A matemática em ação: Posicionamento e Visão usando vetores

Nesta aula, vimos o que são vetores e as diferentes operações que podemos realizar entre eles. Agora discutiremos uma das aplicações que temos disso no mundo dos jogos: a identificação da orientação de personagens através de vetores.

Em jogos, podemos representar a direção em que um personagem está olhando através de um vetor, partindo do centro do personagem e orientado no sentido em que o personagem está virado, como na Figura 26. Essa representação só é possível graças à propriedade dos vetores de, diferentemente das retas, possuírem uma orientação.

Figura 26



Saber a direção em que um personagem está virado é útil de diversas maneiras. Podemos, através disso, lançar projéteis adequadamente ou mesmo exibir apenas o que estiver na vista do personagem, tudo dependendo do que o seu jogo precisar!

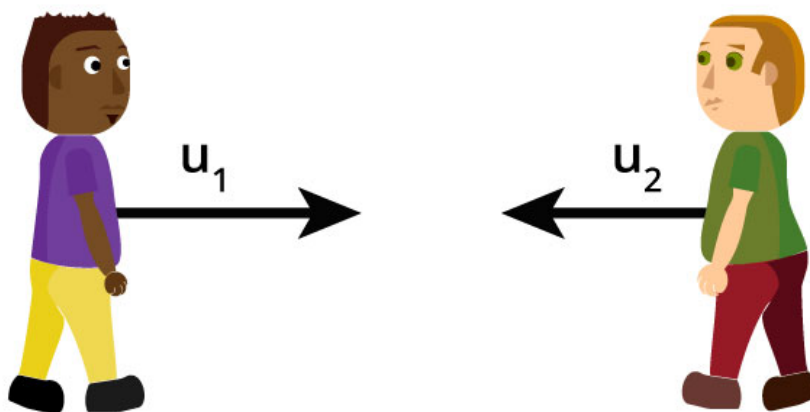
No entanto, há mais uma aplicação específica que é bem interessante e envolve um outro conceito visto ao longo desta aula: a utilização do produto escalar para identificar se dois personagens estão virados na mesma direção.

Em alguns jogos, como *PayDay 2*, diversos NPCs possuem uma modificação de comportamento ao “perceber” a presença do jogador, olhando diretamente para eles. Eles podem falar algo, ativar alarmes ou qualquer outro comportamento que tenha sido programado. No entanto, como podemos descobrir se um personagem está de fato olhando na direção de outro personagem? Isso pode ser feito com uma das propriedades do *dot product*.

Como visto anteriormente, os personagens normalmente possuem um vetor indicando a direção em que estão olhando. Conhecendo os vetores de ambos os personagens, podemos então utilizar o *dot product* para descobrir se ambos estão apontando na mesma direção ou em direções opostas: o resultado será positivo caso ambos estejam na mesma direção e negativo caso não!

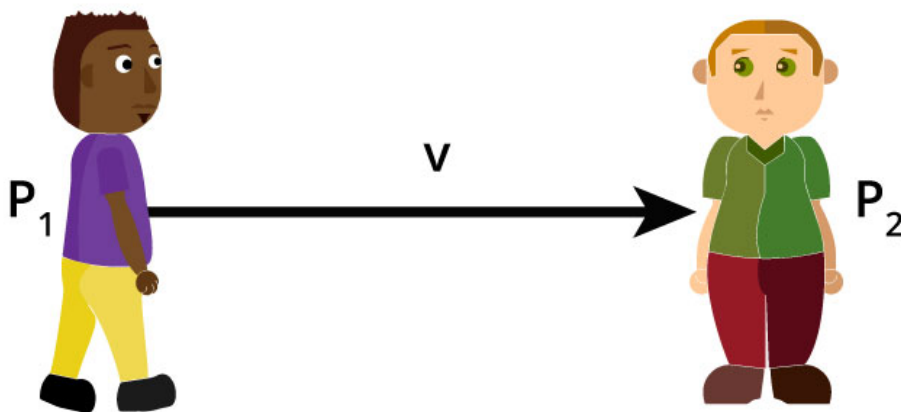
Se os personagens estiverem posicionados um de frente para o outro, seus vetores de orientação apontarão em sentidos opostos, como na Figura 27.

Figura 27



Mas só isso não resolve o nosso problema. Se os personagens estiverem de costas um para o outro o resultado do produto escalar também será negativo, uma vez que os dois vetores de orientação estarão, ainda assim, apontando em direções opostas. Para solucionar esse problema, podemos encontrar o vetor que parte de um personagem e chega no outro, como mostrado na Figura 28.

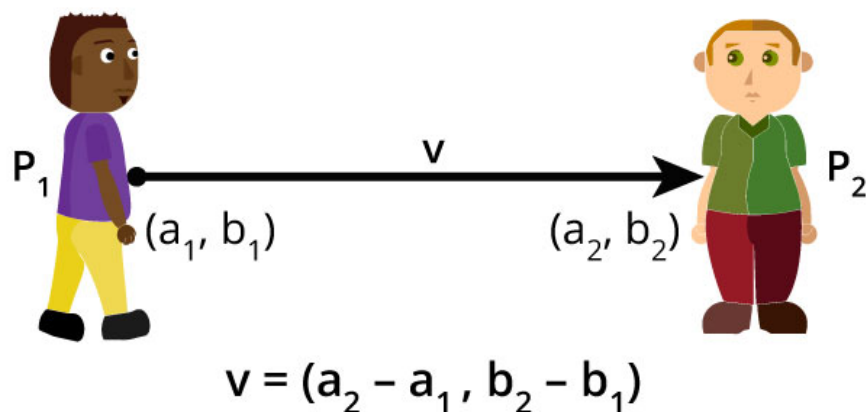
Figura 28



Vamos considerar aqui o vetor que parte do Personagem 1 para o Personagem 2. Vimos no início desta aula que a representação de um vetor $\vec{v}$ que vai de um ponto (a_1, b_1) ao ponto (a_2, b_2) é $\vec{v} = (a_2 - a_1, b_2 - a_2)$. É importante notar que aqui a ordem dessas coordenadas faz toda a diferença. O vetor $\vec{v}$ acima parte do ponto (a_1, b_1) em direção ao ponto (a_2, b_2) , e não o contrário.

Se o ponto (a_1, b_1) representa a localização do personagem 1 e o ponto (a_2, b_2) representa a localização do personagem 2, o vetor $\vec{v}$ sai do personagem 1 em direção ao personagem 2, como mostra a Figura 29.

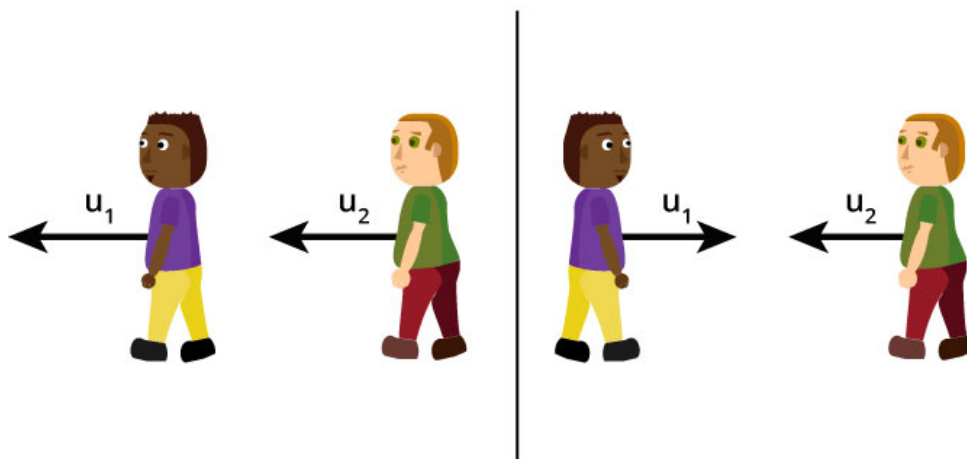
Figura 29



Conhecendo o vetor $\vec{v}$ e os vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ que representam, respectivamente, a orientação dos personagens 1 e 2, temos todos os elementos necessários para detectar as posições relativas dos personagens.

O produto interno dos dois vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ nos traz uma primeira informação: os personagens estão de frente para o mesmo lado ou para lados opostos.

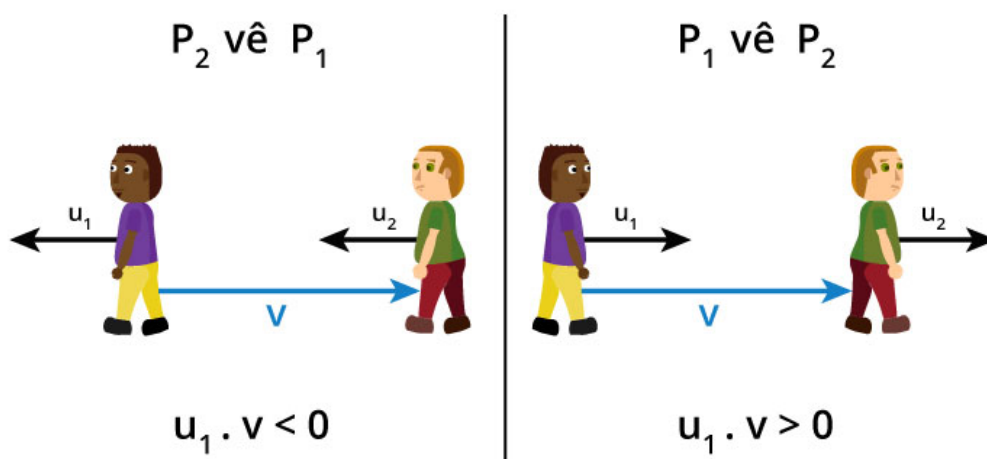
Figura 30



Caso o produto $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$ tenha um valor positivo, apenas um dos personagens pode enxergar o outro, pois ambos olham na mesma direção. Para verificar se o personagem 1 pode ver o personagem 2 basta analisar o sinal do produto $\vec{u}_1 \cdot \vec{v}$.

Se $\vec{u}_1 \cdot \vec{v} > 0$, o personagem 1 está olhando na direção do personagem 2, pois seu vetor de orientação tem o mesmo sentido do vetor que parte dele para o outro personagem. Se $\vec{u}_1 \cdot \vec{v} < 0$, o personagem 2 está olhando na direção do personagem 1, pois o vetor $\vec{u}_2$, que tem o mesmo sentido de $\vec{u}_1$, aponta em direção oposta ao vetor $\vec{v}$. Veja a Figura 31.

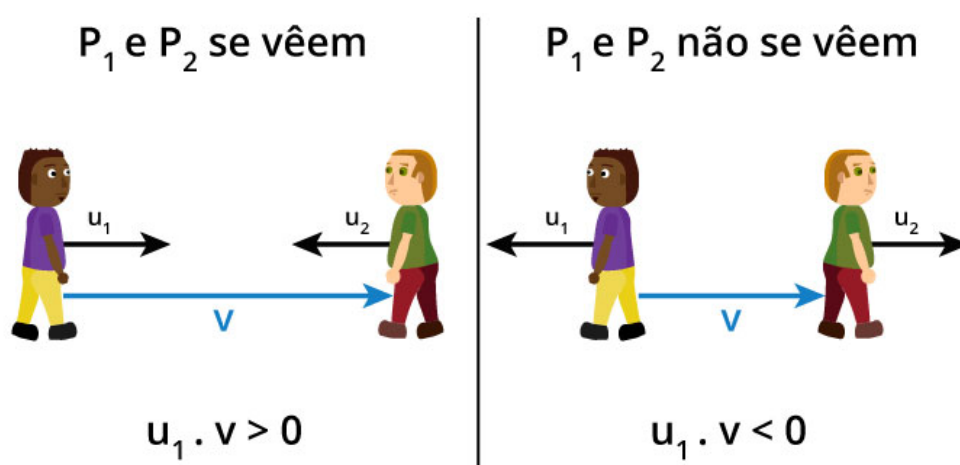
Figura 31



Caso o produto $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2$ tenha um valor negativo, os personagens estão virados para direções opostas. Resta-nos saber se de costas ou de frente um para o outro. Para determinar isso basta, novamente, avaliar o produto $\vec{u}_1 \cdot \vec{v}$.

Se $\vec{u}_1 \cdot \vec{v} > 0$, o personagem 1 está virado na direção do personagem 2, pois os vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{v}$ apontam na mesma direção. Se $\vec{u}_1 \cdot \vec{v} < 0$, o personagem 1 está de costas para o personagem 2. Como ambos apontam em direção opostas, o personagem 2 também está de costas para o personagem 1 e ambos não se enxergam. Veja as duas situações na Figura 32.

Figura 32



Com poucos conceitos sobre vetores foi possível solucionar esse problema. Ao longo da aula muitas outras ferramentas foram apresentadas, cujas aplicações ficarão mais claras com conceitos de física aplicada a jogos e até mesmo motores de jogos.

Resumo

Nesta aula conhecemos um conceito de extrema importância na matemática, que possui diversas aplicações: os vetores. Conhecemos algumas de suas propriedades e operações e discutimos a interpretação geométrica de cada uma dessas operações.

Autoavaliação

Para melhor avaliar o seu aprendizado, após estudar esta aula você deve se fazer os questionamentos a seguir:

01) - Sei o que são grandezas escalares e vetoriais?

02) - Entendo o conceito de vetor e os elementos que caracterizam esse objeto?

03) - Eu sou capaz de calcular a magnitude de um vetor?

04) - Conheço as principais operações sobre vetores e suas interpretações geométricas?

Referências

DUNN, Fletcher; PARBERRY, Ian. **3D math primer for graphics and game development**. CRC Press, 2011.