Matemática Aplicada a jogos

Aula 02 - Andando na Linha - Um Estudo de Retas

Material Didático do Instituto Metrópole Digital - IMD
Versão 5.0 - Todos os Direitos reservados

Apresentação

Ao iniciarmos os estudos sobre os conceitos de retas, várias perguntas podem surgir: o que tem de interessante em uma linha? Qual a importância de estudar retas? Para o desenvolvimento de um jogo são necessários conhecimentos acerca desse conteúdo?

Vamos às respostas! Sim, o estudo das retas é fundamental para quem pretende desenvolver jogos e você entenderá melhor essa importância no decorrer desta aula. Visando facilitar o aprendizado, podemos utilizar jogos para apresentar esses conceitos e aprender “brincando”, tanto no ambiente de sala de aula presencial quanto virtual.

É importante saber que objetos geométricos (a reta, por exemplo) possuem representação algébrica, ou seja, a imagem que se deseja pode ser obtida através de uma expressão ou equação matemática.

Imagine que um software de geometria, que dispõe de ferramentas para a construção de objetos geométricos, está com a ferramenta reta desativada e o usuário não conseguiu ativar. Será que é possível, usando comandos algébricos, construir uma reta?

É possível sim! E será nesta aula que estudaremos: equações da reta; relações entre pontos e retas; interseção entre ponto e reta; ângulos entre retas; e interseção entre retas.

Objetivos

Ao final desta aula você deverá ser capaz de:

- Escrever e identificar as equações da reta.
- Identificar relações entre pontos e retas por meio de representações algébricas e gráficas.
- Determinar o ângulo entre retas.
- Determinar a interseção entre retas.
- Descrever trajetórias retilíneas de objetos animados, detectar possíveis interseções no trajeto e identificar se objetos estão alinhados.

1. Equações da reta

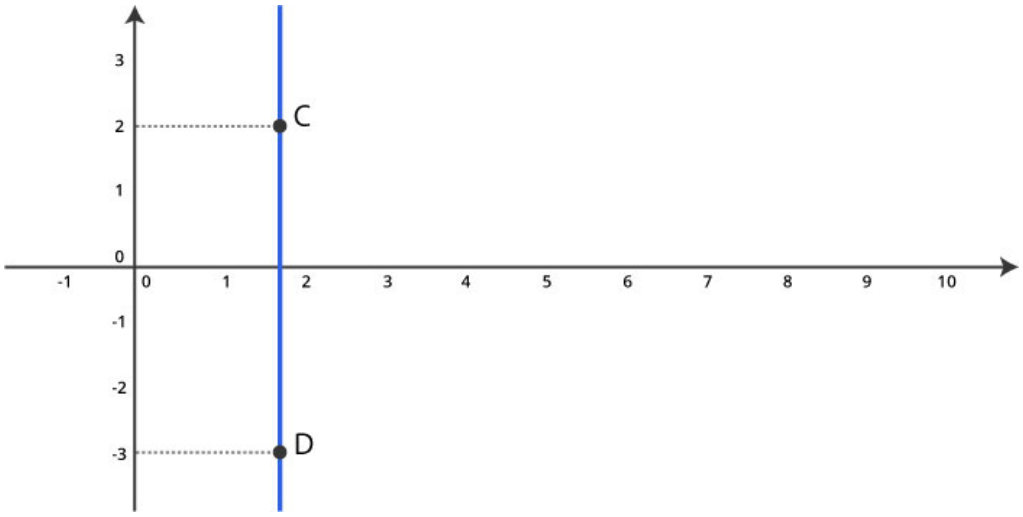
1.1. Retas paralelas aos eixos

Como vimos anteriormente, a reta pode ser representada algebricamente. A representação é dada por uma equação.

Antes de pensarmos na equação da reta, é importante compreendermos que devemos fixar ou admitir um sistema de coordenadas. Admitiremos o sistema de coordenadas cartesianas, que estudamos na aula anterior e, assim, a equação da reta será uma igualdade que envolve x e y.

A imagem a seguir é de uma reta paralela ao eixo y. Vamos pensar na relação que existe entre x e y considerando os pontos dessa reta.

Figura 01 - Reta paralela ao eixo y.



Fonte: Elaborado pelo autor.

- Quais as coordenadas do ponto C?
- Quais as coordenadas do ponto D?
- Existe alguma regularidade nas coordenadas de um ponto qualquer dessa reta?

Se você teve alguma dificuldade para identificar as coordenadas dos pontos C e D, é importante que revise a Aula 01.

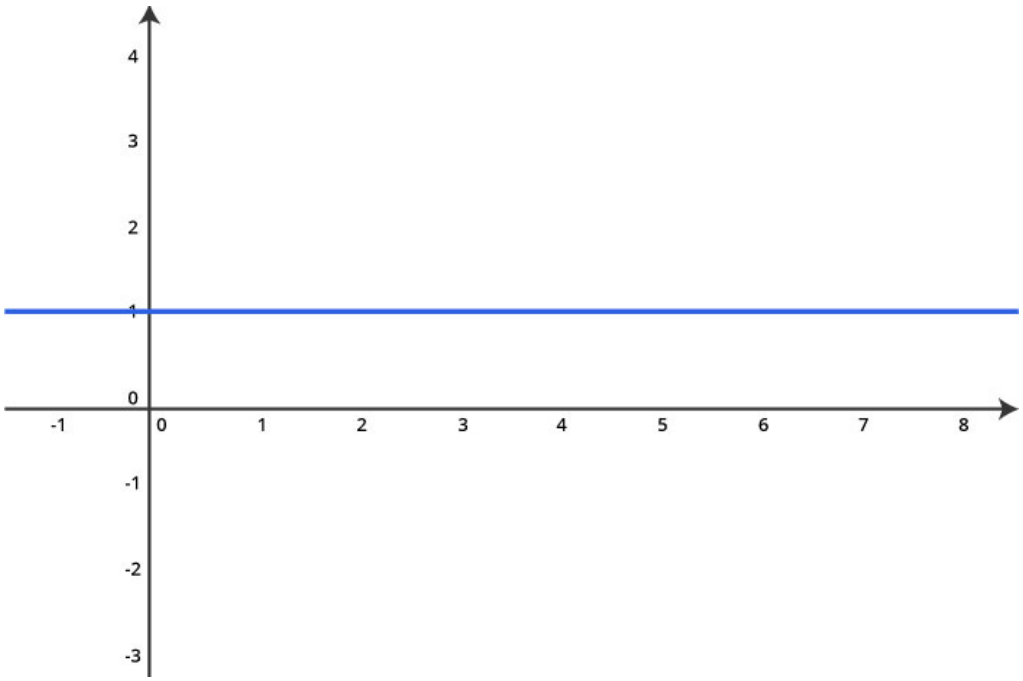
O ponto C tem coordenadas $(2, 2)$ e o ponto D tem coordenadas $(2, -3)$. Veja que qualquer outro ponto dessa reta terá o valor de x igual a 2. Nesse caso, para qualquer valor de y, o valor de x será sempre 2. Assim, essa reta pode ser representada algebricamente pela equação $x = 2$.

Neste momento, você pode estar se questionando: anteriormente foi dito que a equação da reta envolvia x e y, então por que a equação dessa reta não envolve o y?

A equação dessa reta não envolve y porque o valor de x não depende do y. Lembre-se que, analisando a reta, vimos que para qualquer ponto da reta, independentemente do valor de y, o valor de x é sempre igual a 2.

Agora é com você! Antes de prosseguir, tente identificar qual a equação da reta a seguir.

Figura 02 - Reta paralela ao eixo x. y.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Temos no plano cartesiano acima uma reta paralela ao eixo x. Para escrever a equação dessa reta, imaginamos que você analisou alguns pontos dessa reta para, em seguida, verificar o que acontece. Por exemplo, para $x = 4$, o valor de y é 1. Para $x = -2$, o valor de y é 1. Para $x = 0$, o valor de y é 1. Veja que, nesse caso, para qualquer valor que se atribua a x, o valor de y é sempre igual a 1 e, sendo assim, a equação dessa reta não depende de x. A equação é $y = 1$.

Em resumo, você pode perceber que retas paralelas ao eixo x terão equações que não dependem de x. E, retas paralelas ao eixo y terão equações que não dependem de y.

Ficou claro até aqui? Apresentaremos outros conceitos a seguir, vamos adiante!

1.2. Retas não paralelas aos eixos

Uma reta qualquer é representada algebricamente por uma equação do tipo $ax + by + c = 0$. Nessa equação, os valores de x e y são as coordenadas de um ponto qualquer dessa reta. Os valores de a, b e c são números reais quaisquer, desde que a e b não sejam simultaneamente iguais a zero.

Inicialmente, é importante lembrarmos que dois pontos quaisquer determinam uma reta. Assim, dados dois pontos podemos verificar se um terceiro ponto estará ou não nessa reta. É através desse conhecimento que escreveremos a equação de uma reta.

Vamos pensar um pouco: se os pontos $(1, 2)$ e $(-2, 1)$ determinam uma reta, o ponto $(3, 4)$ pertence a essa reta?

Se três pontos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) estão alinhados, ou seja, estão todos dispostos ao longo de uma mesma reta, a matriz D abaixo deve ter determinante igual a zero.

$$D = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Para verificar, então, se o ponto $(3, 4)$ pertence à reta determinada por $(1, 2)$ e $(-2, 1)$, basta calcular o determinante abaixo:

$$\det d = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

Como o determinante resultou -4, um número diferente de zero, os pontos não estão todos em uma mesma reta.

> Para o cálculo do determinante você pode usar a regra de Sarrus. Caso seja necessário, revise o conteúdo das aulas 4 e 5 de Matemática Aplicada do Módulo Básico .

Até aqui temos conhecimento de todas as informações necessárias para encontrar a equação de uma reta:

1. Sabemos que dois pontos determinam uma única reta;
2. Sabemos uma maneira de verificar se um terceiro ponto está na reta determinada pelos dois pontos.

Juntando essas informações, podemos encontrar, a partir de dois pontos dados, uma expressão algébrica que descreve todos os pontos os quais estão alinhados com eles. Para isso, basta que no cálculo do determinante o terceiro ponto ($(3, 4)$ no nosso exemplo) seja substituído por (x, y), uma representação generalista de um ponto qualquer no plano.

O determinante da matriz formada pelas coordenadas dos pontos dados, x e y, deve ser zero, pois os pontos estão na mesma reta.

Se dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) determinam uma reta, a equação dessa reta pode ser encontrada resolvendo o determinante da matriz

$$D = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix}$$

e o igualando a zero.

Equação da reta:

det $D = 0$

A equação da reta determinada pelos pontos $(1, 2)$ e $(-2, 1)$ pode ser encontrada pela equação abaixo:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, encontramos

$$x - 2y + 5 = 0.$$

A equação escrita dessa forma é chamada de **equação geral da reta.**

Não esqueça que x e y são coordenadas de um ponto qualquer dessa reta e, sendo assim, são valores variáveis.

Outra forma de expressar a equação da reta é escrevendo a variável y em função da variável x, ou seja, isolando o y. Fazendo isso na equação do exemplo acima, obtemos

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}.$$

Essa equação é chamada de **equação reduzida da reta.**

Agora, observe os passos a seguir que serão feitos a partir da equação geral dessa mesma reta:

$$x - 2y + 5 = 0$$
$$x + 5 = 2y$$

A partir dessa igualdade podemos escrever cada variável em função de um parâmetro, que nesse caso chamaremos de *t*.

Faremos

$$x + 5 = 2y = t$$
$$x + 5 = t \text{ e } 2y = t$$

Então,

$$x = t - 5 \text{ e } y = \frac{t}{2}$$

Quando escrevemos as coordenadas *x* e *y* em função de um mesmo parâmetro t , ou seja, quando fazemos

$$x = f(t)$$

e

$$y = g(t)$$

obtemos as chamadas **equações paramétricas da reta.**

No exemplo acima temos

$$x = f(t) = t - 5$$
e
$$y = g(t) = \frac{t}{2}$$

Uma possível parametrização de uma reta que passa nos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é dada pelas equações abaixo:

$$x = (x_1 - x_0)t + x_0$$
$$y = (y_1 - y_0)t + y_0$$

Exercício Resolvido

Vamos encontrar uma parametrização para a reta que passa pelos pontos $(-1, 1)$ e $(4, 4)$.

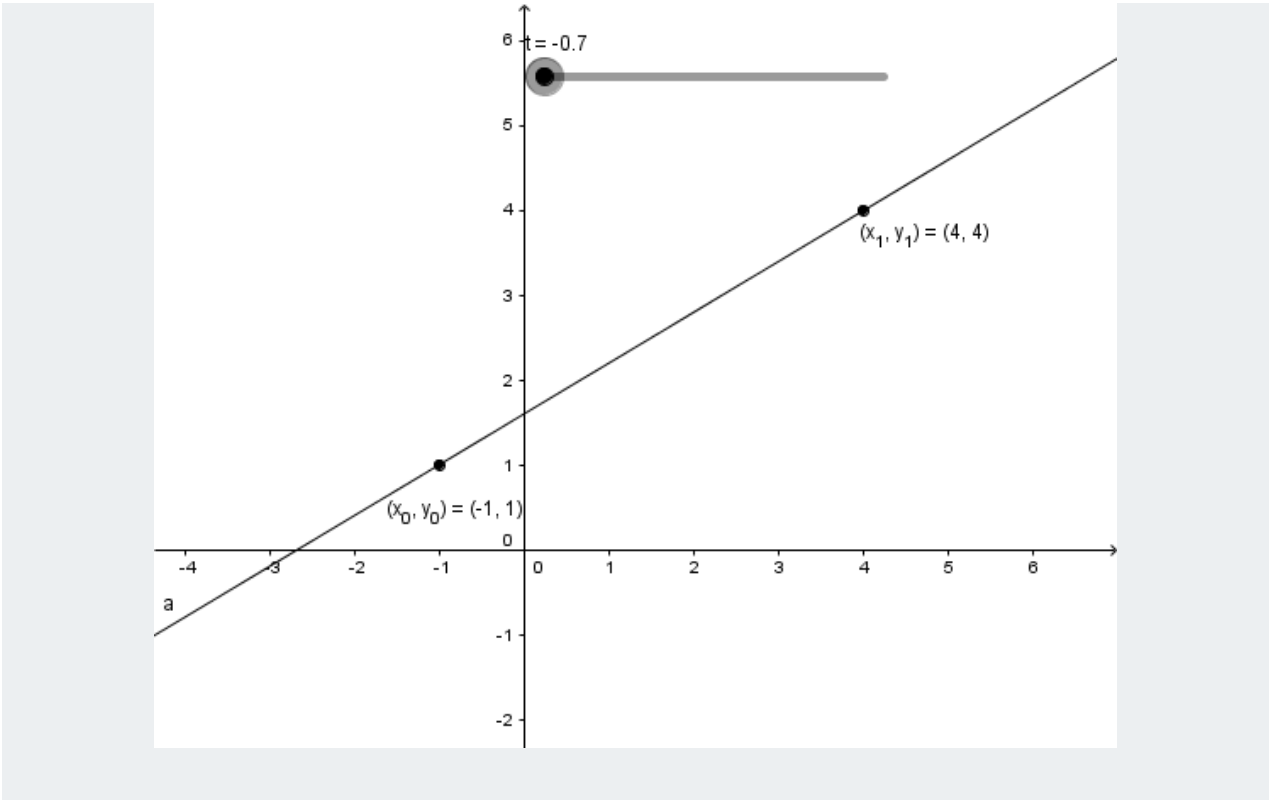
Considere $(x_0, y_0) = (-1, 1)$ e $(x_1, y_1) = (4, 4)$. Pela equação (1) temos

$$x = (4 - (-1))t + (-1) = 5t - 1.$$

Pela equação (2) temos

$$y = (4 - 1)t + 1 = 3t - 1.$$

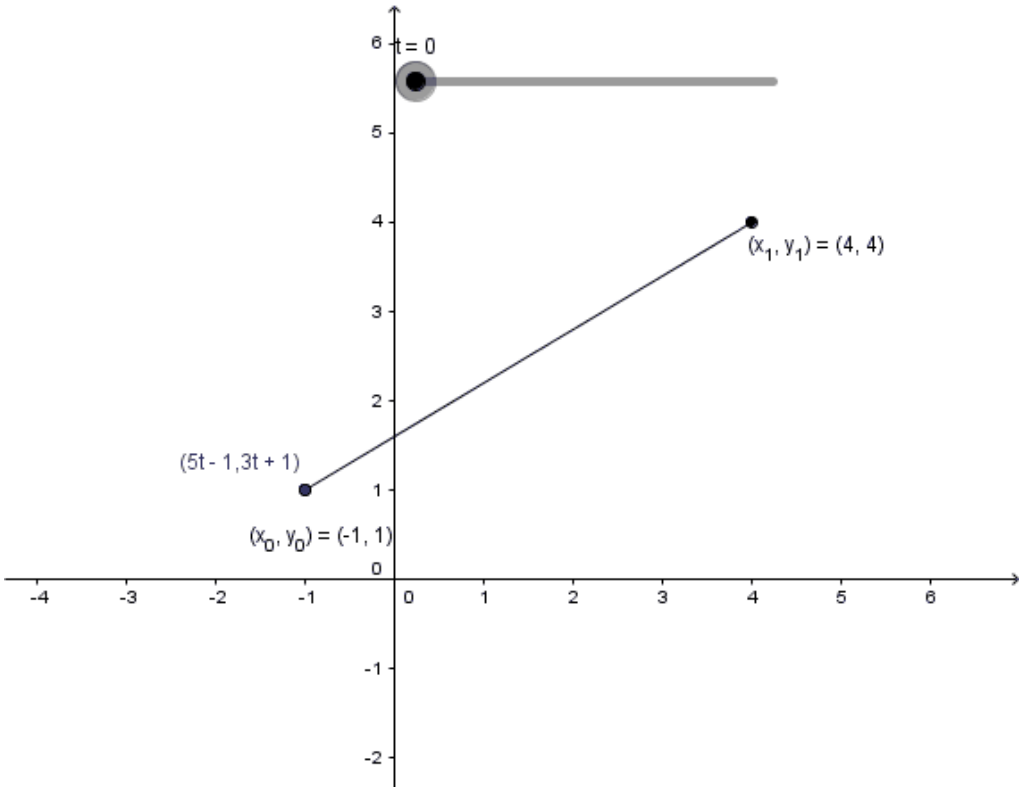
Quando t assume todos os valores da reta real, o ponto $(5t - 1, 3t - 1)$ percorre toda a reta (que é infinita) que passa pelos pontos $(4, 4)$ e $(-1, 1)$. Abaixo podemos ver um pedaço dessa reta, o ponto $(5t - 1, 3t - 1)$ que as percorre para alguns valores de t.



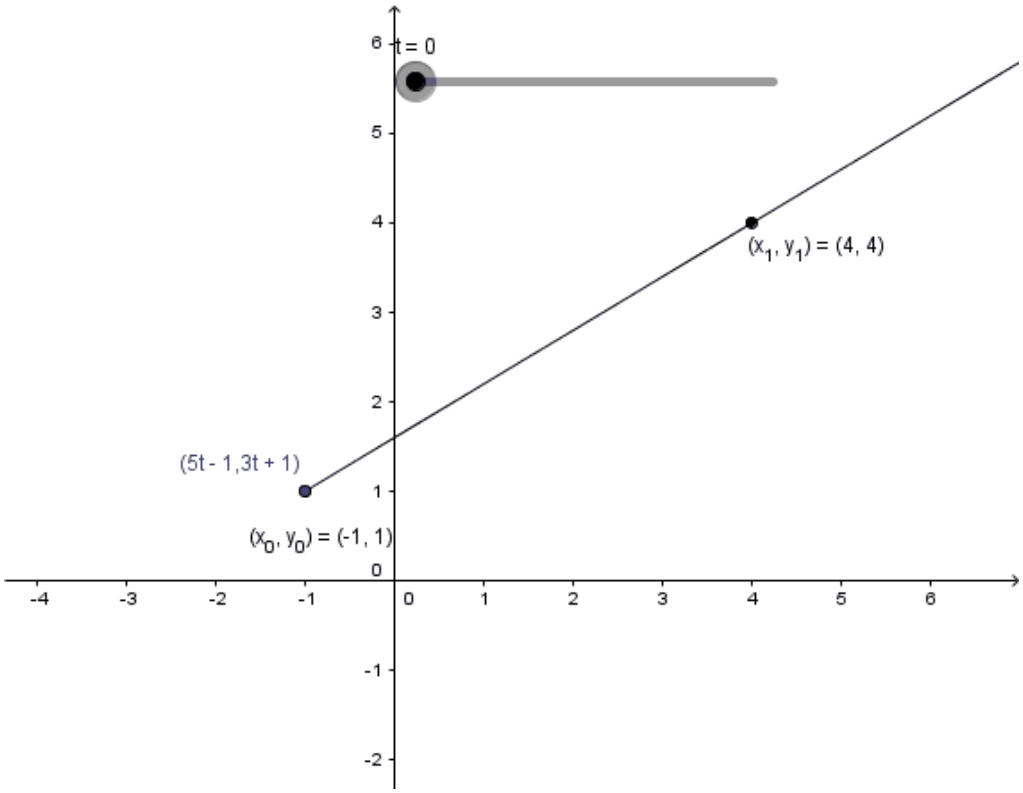
É importante perceber que, em diversas aplicações, o parâmetro pode estar representando qualquer grandeza, como o tempo, por exemplo. Assim, uma reta parametrizada pode representar a trajetória de um personagem ou objeto ao longo do tempo.

É possível também parametrizar apenas um segmento de reta (Parte da reta que tem começo e fim determinados.) ou uma semirreta (Parte da reta que tem um começo em determinado ponto e segue infinitamente em uma direção.). Nesses casos o parâmetro t assume valores em um intervalo pré-determinado contido na reta real, e não em toda a reta.

Para parametrizar um segmento de reta, utilizamos as mesmas equações (1) e (2) e fazemos t variar no intervalo que vai de 0 até 1.



Já para parametrizar uma semirreta que parte de (x_0, y_0) em direção a (x_1, y_1), o parâmetro t deverá assumir apenas valores não negativos, ou seja, o menor valor que t assume deverá ser zero e quando $t = 0$, $(x, y) = (x_0, y_0)$.



A parametrização dada pelas equações (1) e (2) faz o ponto percorrer a reta, o segmento ou a semirreta no sentido de (x_0, y_0) em direção a (x_1, y_1). Devemos, então, levar em consideração o sentido que desejamos obter no movimento ao definir qual será o ponto (x_0, y_0) e qual será o ponto (x_1, y_1).

As equações paramétricas (de retas e também de outros objetos geométricos) são largamente utilizadas para descrever trajetórias, pois descrevem de maneira direta a mudança na posição de um objeto a partir da variação do parâmetro t que pode ser, como já dito, a representação do tempo.

Tipos de equações da reta

Equação Geral:

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

Equação Reduzida:

$$y = a_2x + b_2$$

Equação Paramétrica:

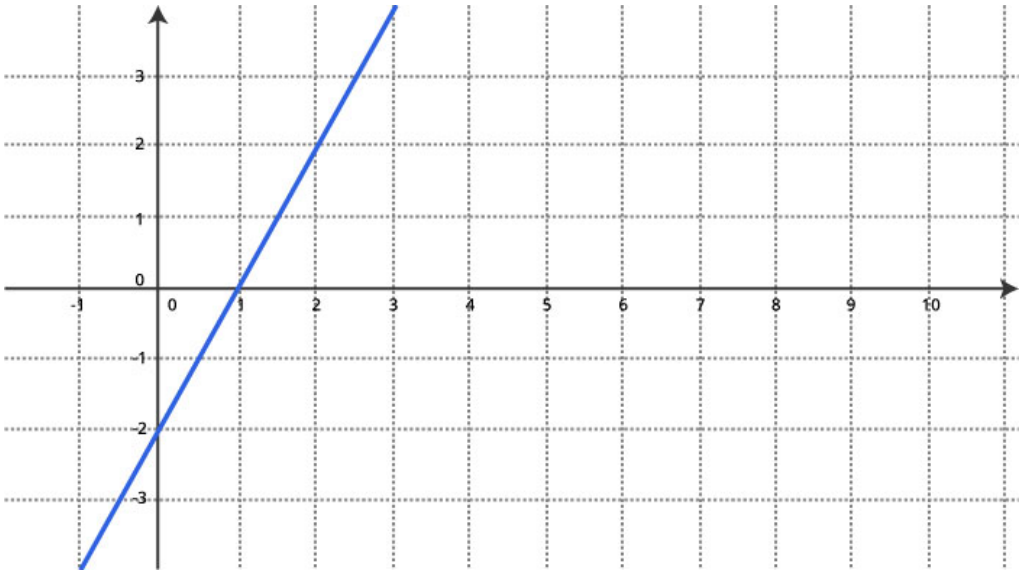
$$x = f(t) \text{ e } y = g(t)$$

É importante notar que não há apenas uma equação paramétrica para uma reta. As equações geral e reduzida são únicas e determinadas pelos coeficientes a_1, b_1 e c_1 na equação geral, e a_2 e b_2 na equação reduzida. Na atividade abaixo veremos duas possíveis maneiras de escrever a equação paramétrica da reta.

Exercício Resolvido

Vamos observar a reta a seguir e escrever as equações: geral, reduzida e paramétrica.

Figura 03 - Reta cortando o eixo x e o eixo y.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Primeiro vamos considerar dois pontos quaisquer dessa reta, por exemplo, $A = (0, -2)$ e $B = (1, 0)$. Seja (x, y) um ponto qualquer dessa reta, então, o determinante a seguir deve ser igual a zero:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Calculando o determinante, obtemos a **equação geral da reta:**

$$0 - 2x + y - (0 + 0 - 2) = 0$$

$\Rightarrow$ (O símbolo "⇒" significa "implica", ou seja, o que vem depois dele é uma consequência imediata do que veio antes.) $-2x + y + 2 = 0$

Isolando o y na equação acima, obtemos **a equação reduzida da reta:**

$$-2x + y + 2 = 0$$
$$\Rightarrow y = 2x - 2$$

Fazendo $y = 2x - 2 = t$, obtemos **equações paramétricas da reta:**

$$\begin{matrix} y = t \\ 2x - 2 = t \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} y = t \\ x = \frac{1}{2}t + 1 \end{cases}$$

Poderíamos também obter outra parametrização (Obter equações paramétricas para uma reta ou objeto geométrico qualquer é equivalente a obter uma parametrização desse objeto.) para essa mesma reta seguindo os passos abaixo:

$$y = 2x - 2 \text{ (equação reduzida)}$$
$$\frac{1}{2}y = x - 1$$

$\frac{1}{2}y = 2x - 1 = t$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y = t \\ x - 1 = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2t \\ x = t + 1 \end{cases}$$

Para pensar! Existem infinitos pontos numa reta. Escolhemos dois deles para, a partir daí, escrevermos as equações da reta. Sendo assim, se tivéssemos escolhido outros dois pontos, teríamos encontrado a mesma equação?

2. Relações entre pontos e retas

Você deve lembrar que no tópico 1, quando estudamos a equação da reta, iniciamos sempre a partir de pontos, que eram dados ou identificados por nós graficamente. Esse fato se dá tendo em vista que dois pontos quaisquer determinam uma única reta. Desse modo, podemos relacionar pontos e retas da seguinte forma: dados dois pontos, está determinada uma reta. Essa reta pode ser representada algebricamente por uma equação. Agora, podemos verificar se um terceiro ponto pertence ou não a esta reta que foi determinada. Através das representações gráficas do ponto e da reta é fácil verificar, visualmente, se o ponto pertence à reta ou não. Mas, algebricamente, o que podemos fazemos para dizer se o ponto está ou não na reta?

Seja a reta $ax + by + c = 0$. Um ponto de coordenadas (x, y) pertence a essa reta se, substituindo os valores de x e de y na equação da reta, tivermos igualdade satisfeita.

Exercício Resolvido

Verifique se o ponto de coordenadas $(2, -1)$ pertence à reta determinada pelos pontos $(1, 3)$ e $(-2, 1)$.

A reta determinada pelos pontos $(1, 3)$ e $(-2, 1)$ tem equação dada por

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$1 + 3x - 2y - (x + y - 6) = 0$$
$$2x - 3y + 7 = 0$$

Agora, para verificar se o ponto $(2, -1)$ pertence a essa reta, vamos substituir, na equação da reta, o valor de x pelo número 2 e o valor de y pelo número -1.

$$2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) + 7 =$$
$$4 + 3 + 7 = 14 \neq 0$$

Logo o ponto $(2, -1)$ não pertence à reta determinada pelos pontos $(1, 3)$ e $(-2, 1)$.

Atividade

Vamos fazer o mesmo com o ponto $(1, 3)$. O que você pode afirmar acerca da relação desse ponto com a reta de equação $2x - 3y + 7 = 0$?

Retomando o Exercício Resolvido 2 da primeira aula

Com as informações que temos até aqui já podemos retomar o Exercício Resolvido 2 da aula anterior. O exercício pede que seja verificada a possibilidade de mover um personagem através de sua habilidade de *blink*, com *range* de 100 unidades, do ponto inicial $A = (152, 127)$ para sua base posicionada no ponto $(12, 17)$.

Calculando a distância entre esses pontos, $d \simeq 178$, verificamos que essa distância é superior ao *range* e, por essa razão, não é possível efetuar o movimento para aquele ponto. Quando isso acontece, o personagem é movido para o ponto que representa o alcance máximo na direção indicada. Em outras palavras, o ponto para onde o personagem será transportado está sobre a reta determinada pela sua posição inicial e pela posição para a qual ele desejava se mover e está a uma distância de 100 unidades do ponto inicial do movimento.

Para calcular, então, para qual ponto será movido o personagem devemos encontrar a equação da reta que passa por $(152, 127)$ e por $(12, 17)$.

$$\begin{vmatrix} 12 & 17 & 1 \\ 152 & 127 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$1524 + 71x + 152y - (127x + 12y + 2584) = 0$$

$$-10x + 140y - 1060 = 0$$
$$-11x + 14y - 106 = 0$$

$$y = \frac{11x+106}{14}$$

Além de estar na reta de equação acima, sabemos que o ponto procurado tem distância igual a 100 unidades do ponto $(152, 127)$. Portanto

$$\sqrt{(152 - x)^2 + (127 - y)^2} = 100$$

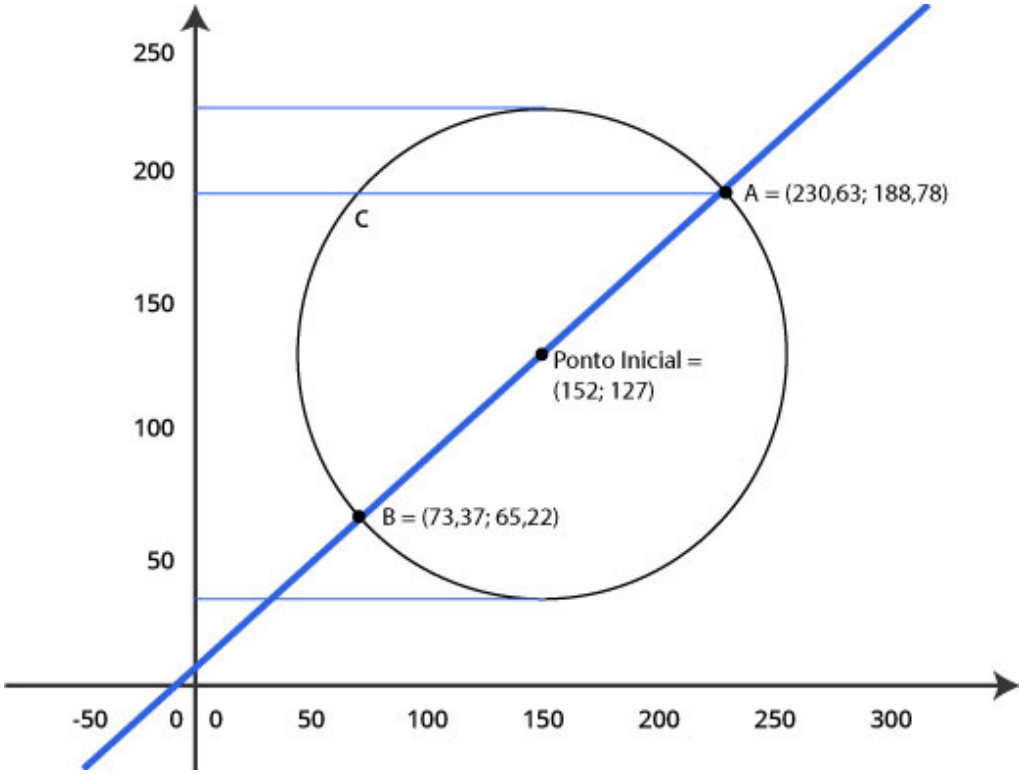
Note que, se o ponto (x_0, y_0) está na reta que passa pelos pontos $(152, 127)$ e $(12, 17)$ e está a uma distância de 100 unidades do ponto $(152, 127)$, o ponto (x_0, y_0) deve satisfazer às duas equações acima. Ou seja,

$$y_0 = \frac{11x_0+106}{14}$$
e
$$x_0^2 + y_0^2 - 304x_0 - 254y_0 + 29233 = 0.$$

Uma vez que esse sistema de equações (sistema de equações é um conjunto de equações que possuem as mesmas incógnitas) está montado, basta encontrar o valor de x_0 e y_0 que o satisfaz. Existem dois pontos que serão solução desse

sistema, pois uma reta pode interceptar uma circunferência em até dois pontos. Veja a Figura 4.

Figura 04 - Interseção entre a reta e o círculo de raio 100.



Fonte: Elaborado pelo autor.

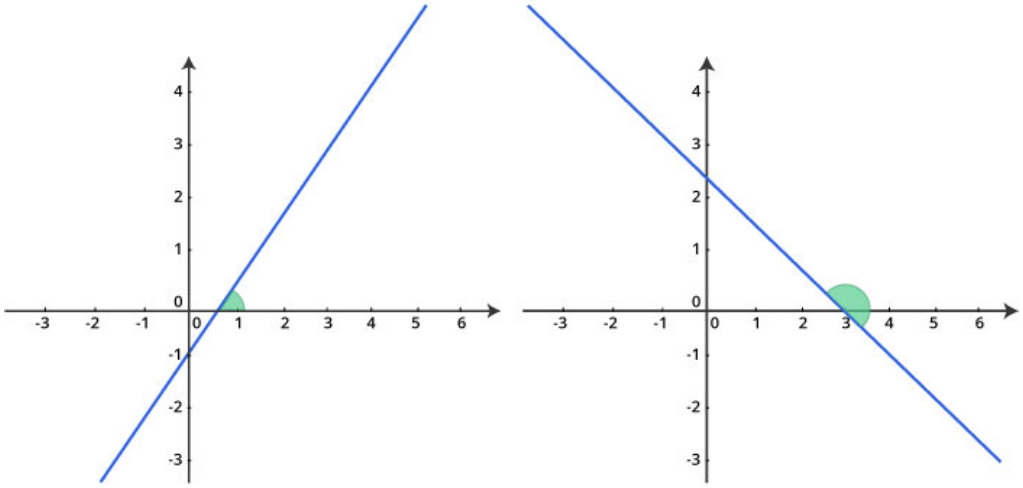
Para determinar qual desses dois pontos A e B é o (x_0, y_0) que procuramos, basta saber em qual direção foi o clique.

3. Retas e ângulos

3.1. Inclinação da reta

A partir de dois pontos quaisquer pertencentes a uma reta não vertical, podemos encontrar o coeficiente angular m dessa reta. O coeficiente angular m de uma reta é igual à tangente do ângulo de inclinação dessa reta em relação ao eixo das abscissas, medido em sentido anti-horário a partir desse eixo. Esse conceito deverá ficar mais claro a partir da imagem abaixo:

Figura 05 - Ângulo θ formado entre a reta e o eixo x para uma reta crescente (à esquerda) e decrescente (à direita).



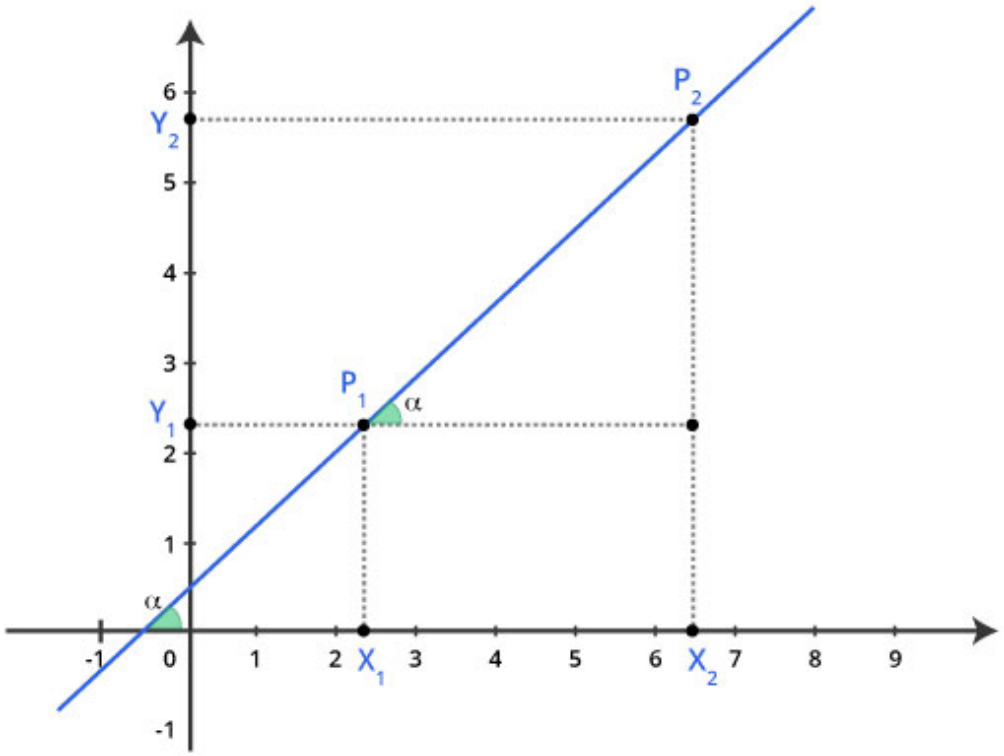
Fonte: Elaborado pelo autor.

Em ambas as imagens acima o ângulo que a reta forma com o eixo x, ou eixo das abscissas medido em sentido anti-horário, está representado pela letra grega θ. Dizemos, então, que o coeficiente angular de cada uma delas é $m = tg\,\theta$.

Como podemos, então, calcular esse coeficiente? E que relação ele tem com as equações da reta?

Dados dois pontos podemos facilmente calcular o coeficiente angular da reta determinada por eles. Sabendo que, em um triângulo retângulo, a medida da tangente de um ângulo θ é igual à razão entre as medidas do cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo, a figura abaixo nos aponta o que devemos fazer para calcular o coeficiente angular da reta que passa por P_1 e P_2.

Figura 06 - Reta passando pelo ponto P_1 e P_2.



Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

Na figura, o ponto P_1 tem coordenadas (x_1, y_1) e P_2 tem coordenadas (x_2, y_2). A reta que passa pelos dois pontos forma com o eixo x um ângulo θ. Para calcular a tangente de θ basta considerarmos o triângulo com vértices nos pontos P_1 ,P_2 e no ponto (x_2, y_1).

$$tg\,\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

O coeficiente angular m de uma reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dado pela equação

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ao encontrar a *equação reduzida* da reta que passa pelos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), o coeficiente angular é exatamente a constante que multiplica o x naquela equação. Podemos reescrever, então, a equação reduzida da reta como

$$y = mx + b$$

onde b é o valor no qual a reta corta o eixo y (verifique!). O valor de b é conhecido como *coeficiente linear da reta*.

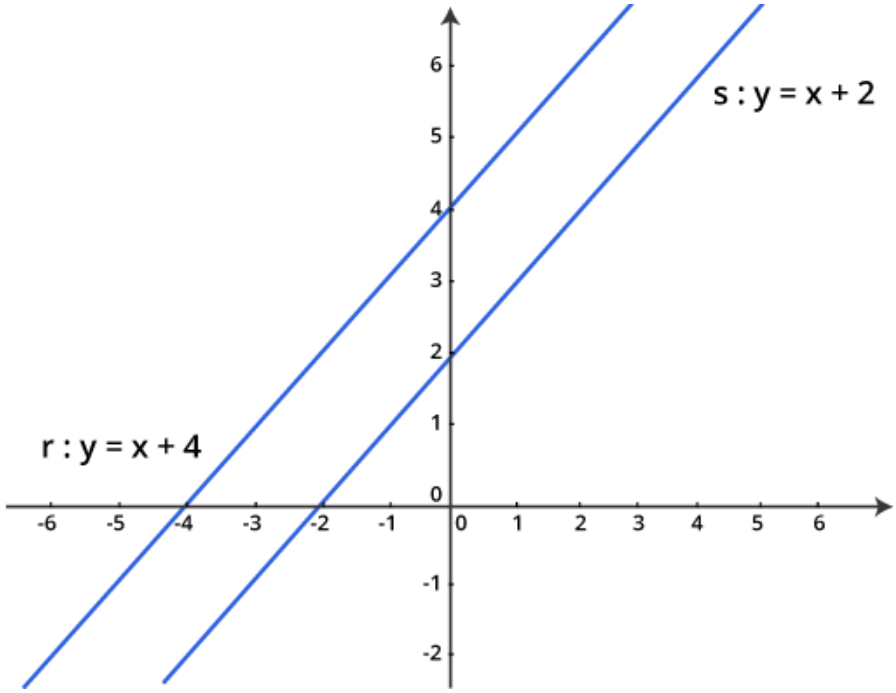
Na construção abaixo você poderá visualizar o que ocorre com a reta à medida que variamos seus coeficientes linear e angular.

Conteúdo interativo, acesse o Material Didático.

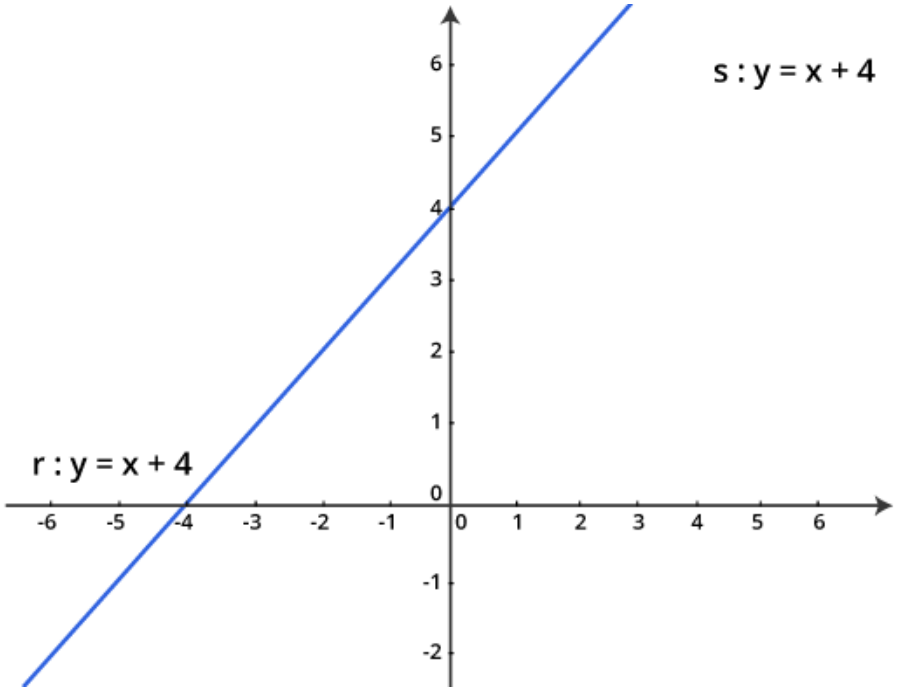
3.2. Posição relativa entre duas retas

O Teorema de Pitágoras é uma das relações entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo. A relação é a seguinte: O quadrado da medida referente à hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas referentes aos catetos.

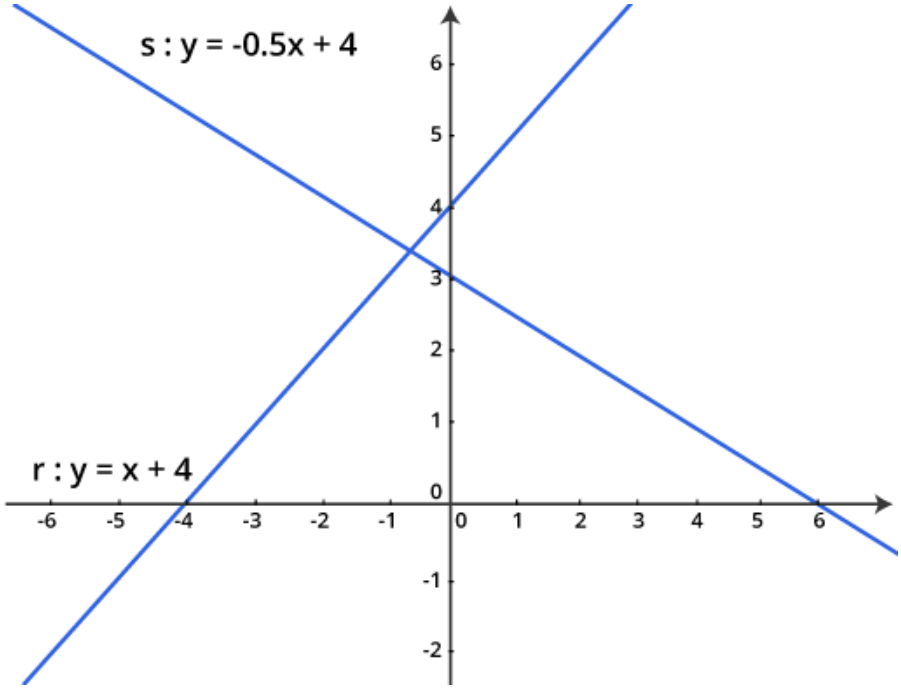
1. Duas retas que possuem coeficientes angulares iguais e lineares diferentes são paralelas, ou seja, não se cruzam.



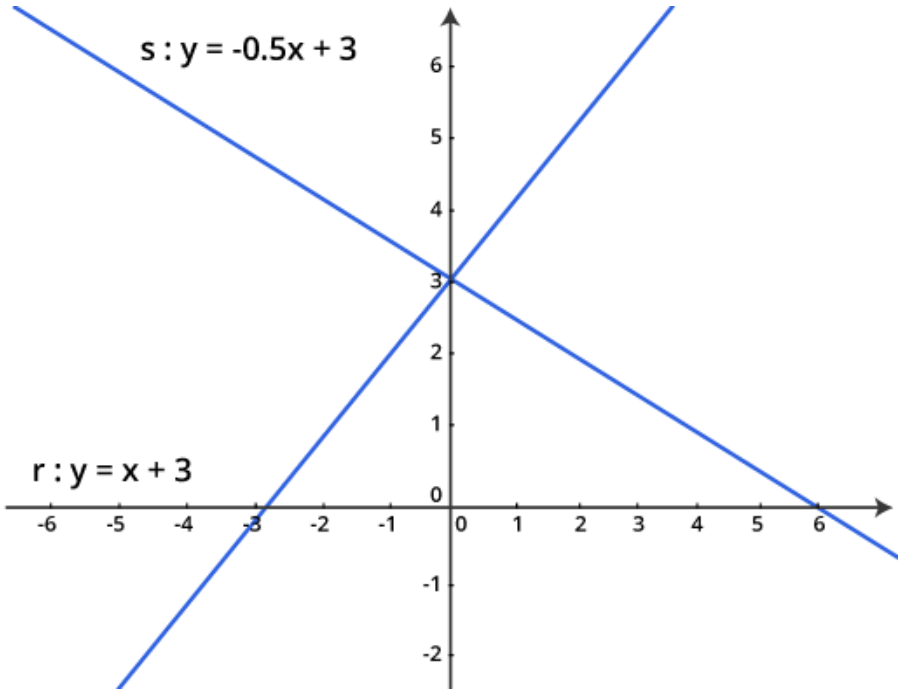
2. Duas retas que possuem coeficientes angulares e lineares iguais são coincidentes, ou seja, iguais.



3. Duas retas que possuem coeficientes angulares diferentes são concorrentes, ou seja, se cruzam em algum ponto.



Se tiverem coeficientes lineares b iguais, se cruzam no ponto $(0, b)$.



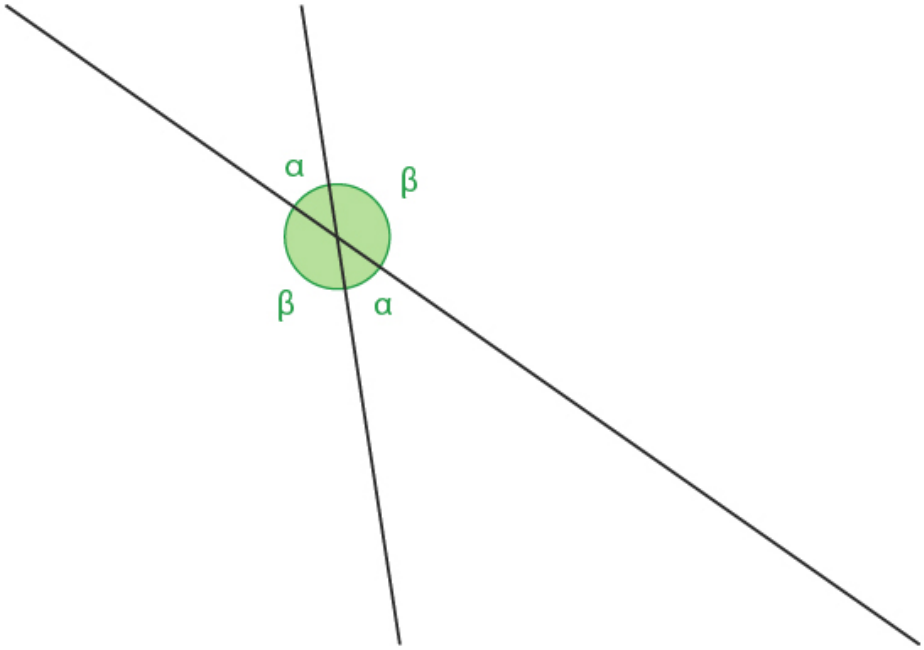
Na construção abaixo você poderá visualizar o que ocorre com as retas à medida que variamos seus coeficientes lineares e angulares. Você poderá simular todas as situações discutidas acima.

Conteúdo interativo, acesse o Material Didático.

3.3.Ângulo entre retas

Duas retas que não sejam paralelas nem perpendiculares formam quatro ângulos, dois agudos de mesma medida e dois obtusos, também de mesma medida. Dessa forma, para conhecer cada um desses ângulos basta encontrar a medida de um deles.

Figura 07 - Ângulos formados entre retas.

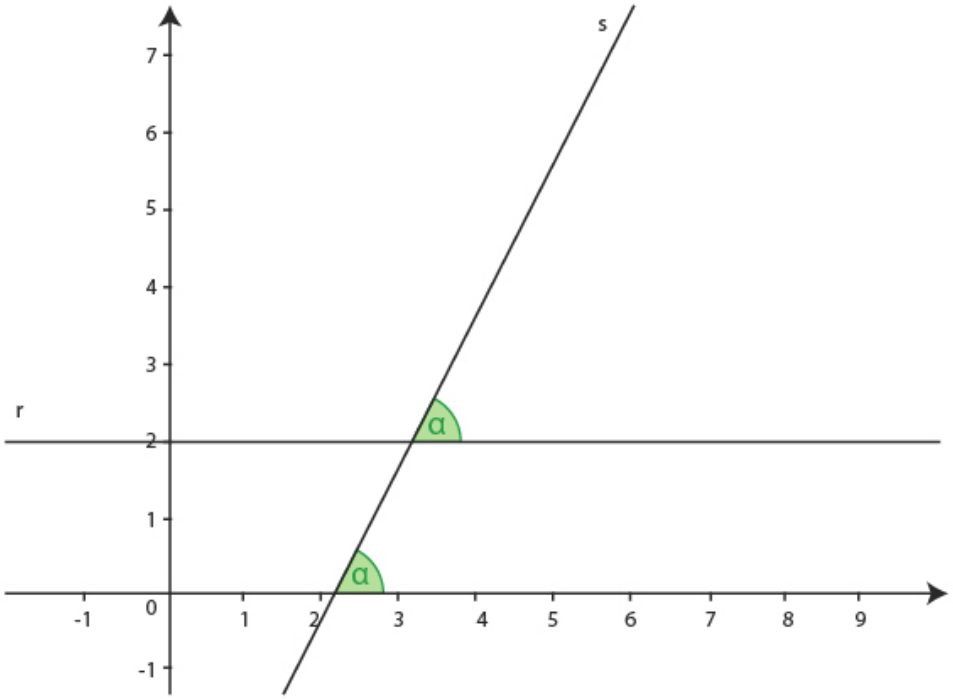


Fonte: Elaborado pelo autor.

Na figura 7 denotamos por α os ângulos agudos (Um ângulo é agudo quando sua medida é menor que 90°) e por β os ângulos obtusos (Um ângulo é obtuso quando sua medida é maior que 90°). A soma $\alpha + \beta$ resulta em 180°, ou seja, α e β são ângulos suplementares (Dizemos que dois ângulos são suplementares quando a soma dos dois é 180°).

Para determinar o ângulo formado entre duas retas devemos avaliar algumas situações. Se uma reta r é paralela ao eixo x, o ângulo formado entre essa reta e outra reta s é o mesmo formado entre s e o eixo x, como podemos visualizar na figura 7.

Figura 08



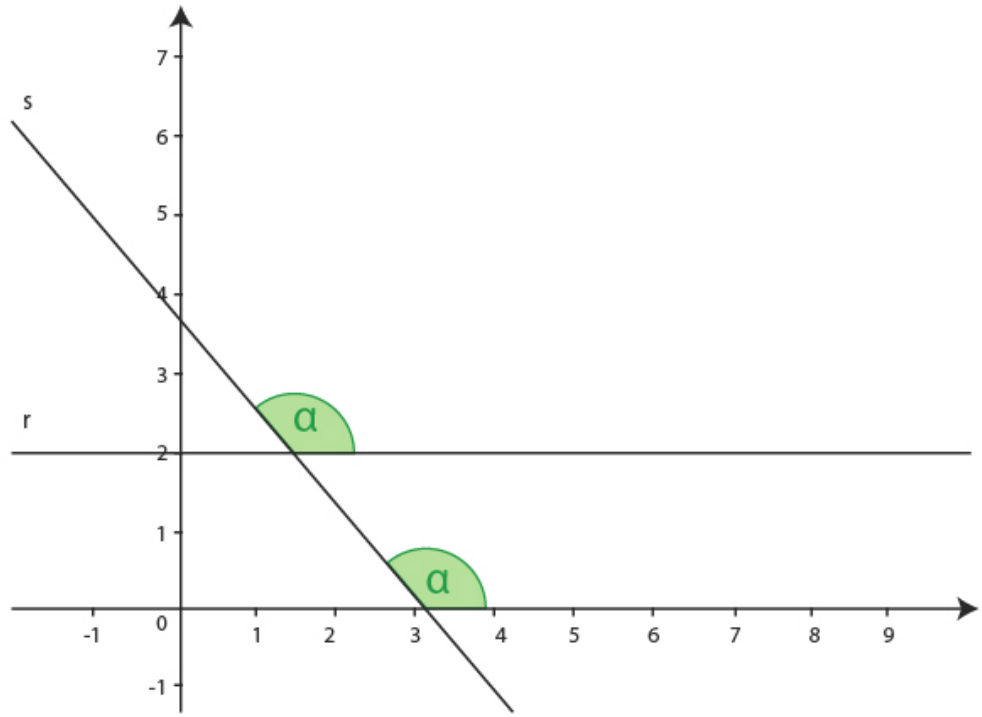
Fonte: Elaborado pelo autor (2015).

Vimos que o coeficiente angular m_s de s será, então,

$$m_s = tg\,\alpha$$

e, assim, é possível encontrar facilmente o ângulo entre r e s, que será o ângulo cuja tangente é igual ao coeficiente angular da reta s. Se esse m_s for maior que zero, como na Figura 8, estaremos determinando o ângulo agudo entre as retas. Se m_s for menor que zero, como na Figura 9, estaremos determinando o ângulo obtuso entre as retas.

Figura 09

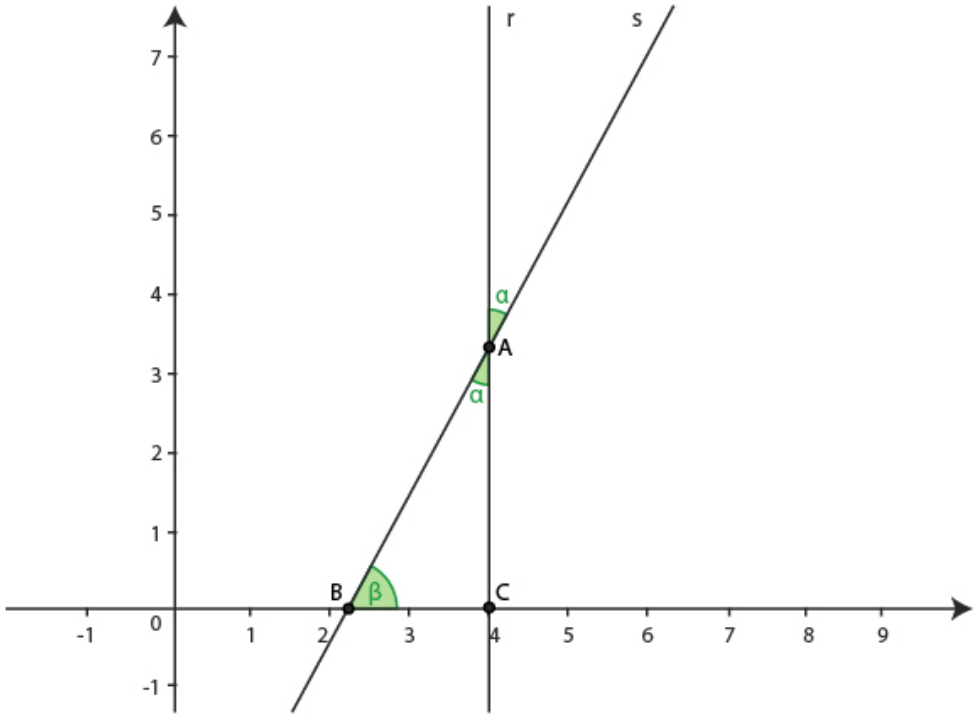


Fonte: Elaborado pelo autor.

Outra possível situação é o caso em que a reta r é paralela ao eixo y.

Se o ângulo β que a reta s forma com o eixo x é agudo, para determinar o ângulo α entre r e s basta observar que $\alpha + \beta = 90^\circ$, onde β é o ângulo que s forma com o eixo x. Nessa situação o coeficiente angular m_s da reta s é sempre um número positivo.

Figura 10



Fonte: Elaborado pelo autor.

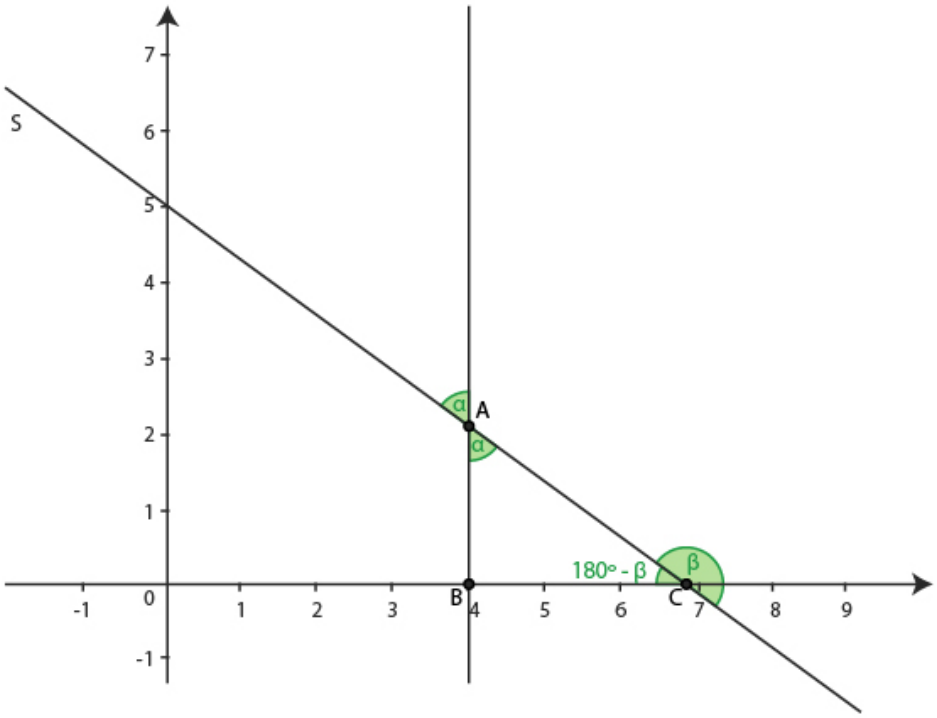
Note que

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{tg\,\beta} = \frac{1}{m_s}.$$

Equação 1

Por outro lado, se o ângulo que a reta s forma com o eixo x é obtuso, temos a situação mostrada na Figura 11. Nessa situação o coeficiente angular m_s da reta s é sempre um número negativo.

Figura 11



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse caso

$$tg\,\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{1}{tg\,(180^\circ - \beta)} = \frac{1}{-tg\,\beta} = \frac{1}{m_s}.$$

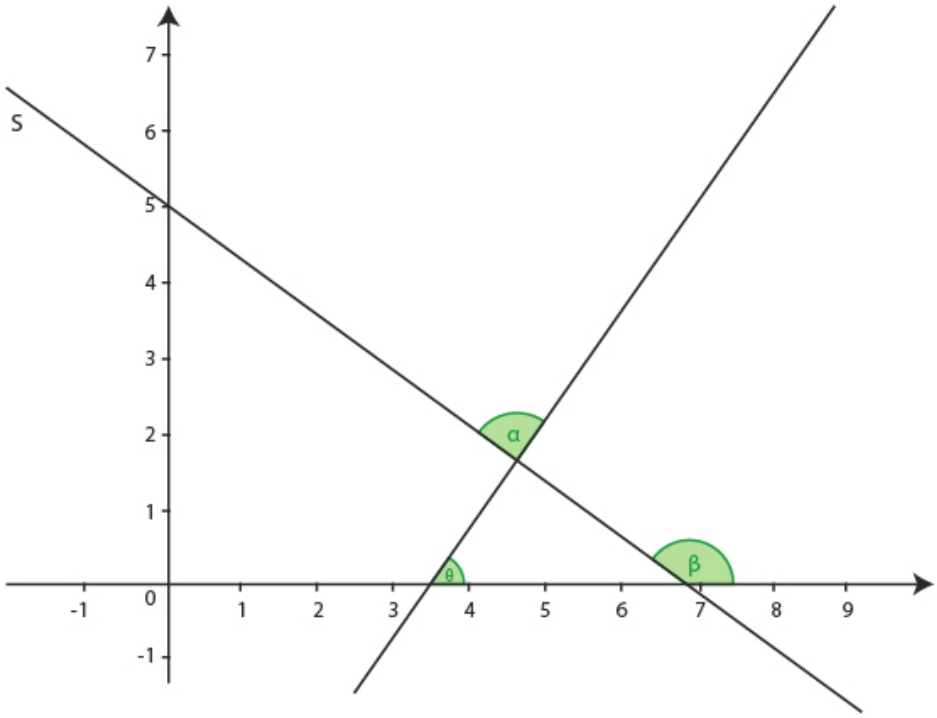
Equação 2

Das equações (1) e (2) podemos concluir que, se desejamos encontrar o ângulo α entre duas retas e uma delas é paralela ao eixo y, basta encontrar o ângulo agudo α tal que

$$tg\,\alpha = \frac{1}{|m_s|}.$$

E se quisermos determinar o ângulo entre duas retas r e s e nenhuma delas é paralela a um dos eixos coordenados? Essa situação está ilustrada na Figura 12.

Figura 12



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse caso, α é o ângulo cuja tangente é dada por

$$tg\ \alpha = |\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}|$$

onde $m_r = tg\ \theta$ e $m_s = tg\ \beta$.

4. Interseção entre retas

Vimos que duas retas podem ser paralelas, coincidentes ou concorrentes. Se duas retas são concorrentes, existe um ponto de interseção entre elas, ou seja, um ponto que pertence a ambas as retas. É possível, então, encontrar esse ponto a partir das equações das retas. Assim, seja $A = (x_0, y_0)$, o ponto de interseção das seguintes retas:

$$r : ax + by + c = 0$$
$$s : dx + ey + f$$

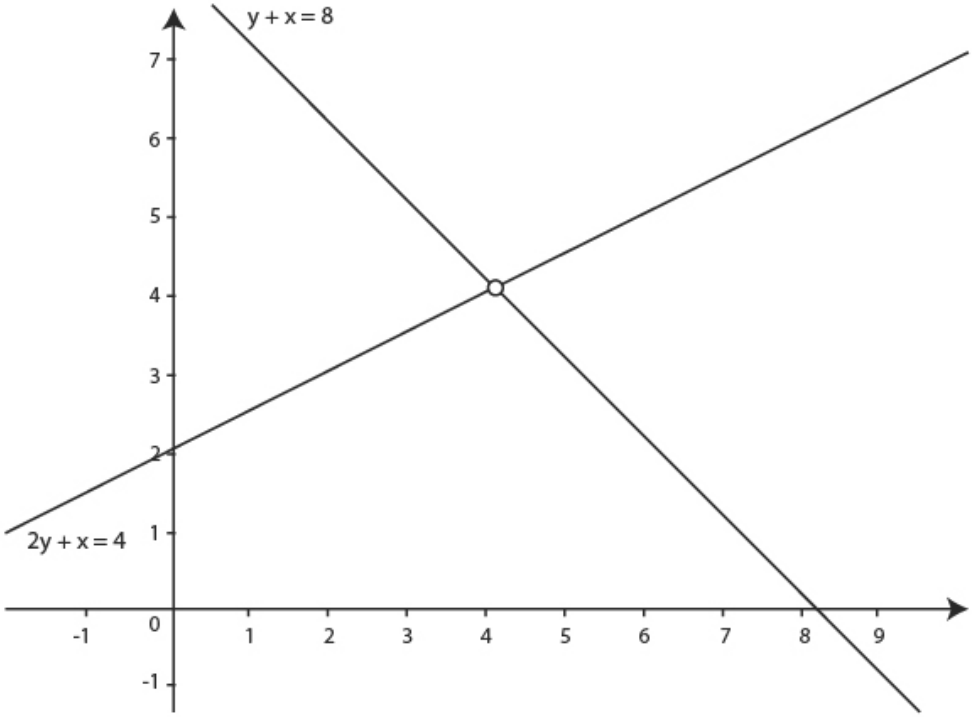
Como A pertence às duas retas, (x_0, y_0) deve ser solução do sistema

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ dx + ey + f = 0 \end{cases}$$

Atividade

Encontre o ponto de interseção das retas da Figura 13 abaixo:

Figura 13



Fonte: Elaborado pelo autor.

5. A matemática em ação: o exemplo do Pong

Nessa aula, conhecemos diversos conceitos relacionados a retas. A aplicação desses conceitos em jogos é bem clara e será aqui abordada através de um clássico da história dos games: Pong!

Que tal começarmos jogando para então discutirmos os elementos? Construímos uma versão bem simples com dois retângulos e um círculo. Acrescentamos ao nosso jogo a trajetória do círculo que é (adivinha?) uma reta! Você vai jogar usando as setas do teclado para controlar o retângulo da esquerda. Pra começar é só clicar no vídeo de demonstração abaixo!

Conteúdo interativo, acesse o Material Didático.

Observe que a bola, em seu movimento, está sempre utilizando trajetórias retilíneas. As propriedades desse movimento serão discutidas em uma oportunidade posterior, na disciplina de Física Aplicada a Jogos. Por enquanto, vamos nos ater apenas à matemática do processo.

No início do jogo, a bola é lançada em direção ao jogador. Esse lançamento ocorre utilizando um ponto inicial e um ângulo definido aleatoriamente para indicar a direção que a bola deve se mover. Conhecendo um ponto e um ângulo conseguimos determinar a equação reduzida da reta, certo? Vamos agora encontrar qual reta é essa que define esse movimento.

Para fazer isso, posicionaremos a origem do sistema de coordenadas no centro da tela, de onde a bola surge no início do jogo. Nosso objetivo é, então, encontrar a reta que passa no ponto (0, 0) e forma com o eixo x um ângulo α.

Sabemos que a equação reduzida de uma reta é dada por

$$y = mx + n$$

onde m é o coeficiente angular da reta, ou seja, a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo x. No nosso caso,

$$m = tg\ \alpha.$$

Sabemos também que o ponto $(0, 0)$ está na reta que procuramos. Então esse ponto deve satisfazer a equação da reta, ou seja

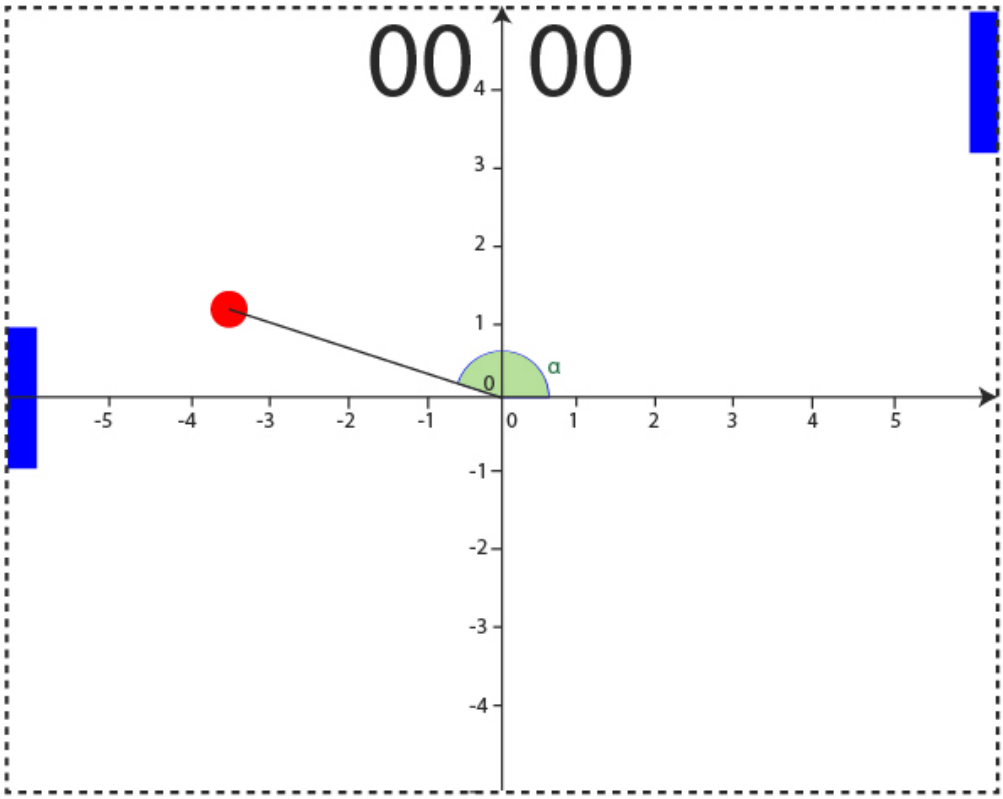
$$0 = m \cdot 0 + n,$$

onde podemos concluir que *n*=0.

No nosso Pong, então, dado um ângulo α gerado aleatoriamente, a trajetória percorrida pela bola será a reta

$$y = (tg\ \alpha).x$$

Figura 14



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para que esse movimento visualmente ocorra, a bola, inicialmente desenhada no ponto (x_0, y_0), deve ter seus valores alterados a cada frame para um novo ponto (x_1, y_1) coerente com sua trajetória. Que novo ponto é esse? Como encontramos esse ponto? Simples! Utilizamos uma parametrização da reta que acabamos de encontrar.

Note que, na Figura 14, se o jogador não mover a plataforma azul para cima a bola sairá da tela do jogo, fazendo com que o computador marque um ponto. A trajetória até essa saída é o segmento de reta que liga o ponto $(0, 0)$ ao ponto $(-6, -6.tg\ \alpha)$. Suponha que, na Figura 14, $\alpha = 135^\circ = \frac{3\pi}{4} rad$. Precisamos parametrizar o segmento que vai de $(0, 0)$ a $(-6, 6)$. Das equações (1) e (2), temos

$$x = -6t$$

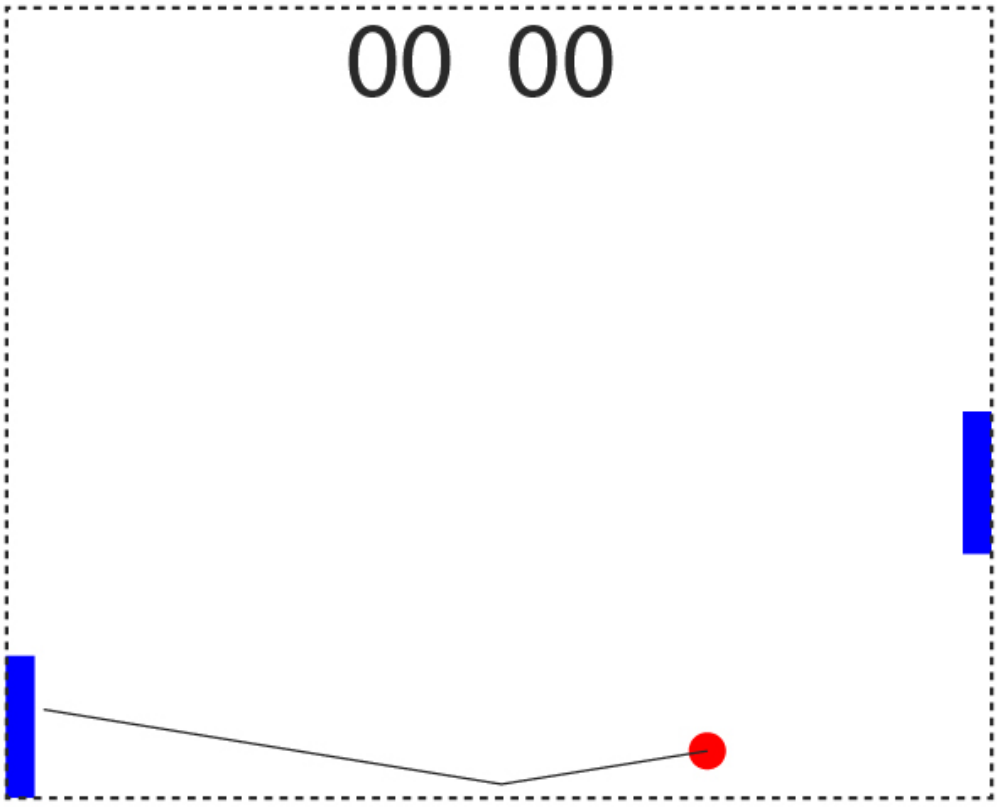
e

$$y = 6t.$$

A cada *frame* o valor de t será incrementado de modo que o movimento da bola seja visível. O tamanho desse incremento pode ser ajustado de acordo com a necessidade e o detalhamento gráfico do jogo. Esse incremento define o que chamamos de velocidade da bola, isto é, o quanto ela se desloca a cada frame.

Dependendo do ângulo α a trajetória da bola pode levá-la a atingir a parede superior ou inferior, representadas no jogo pelas linhas pontilhadas superior e inferior. Caso isso aconteça, sua trajetória será alterada, como podemos ver na Figura 15.

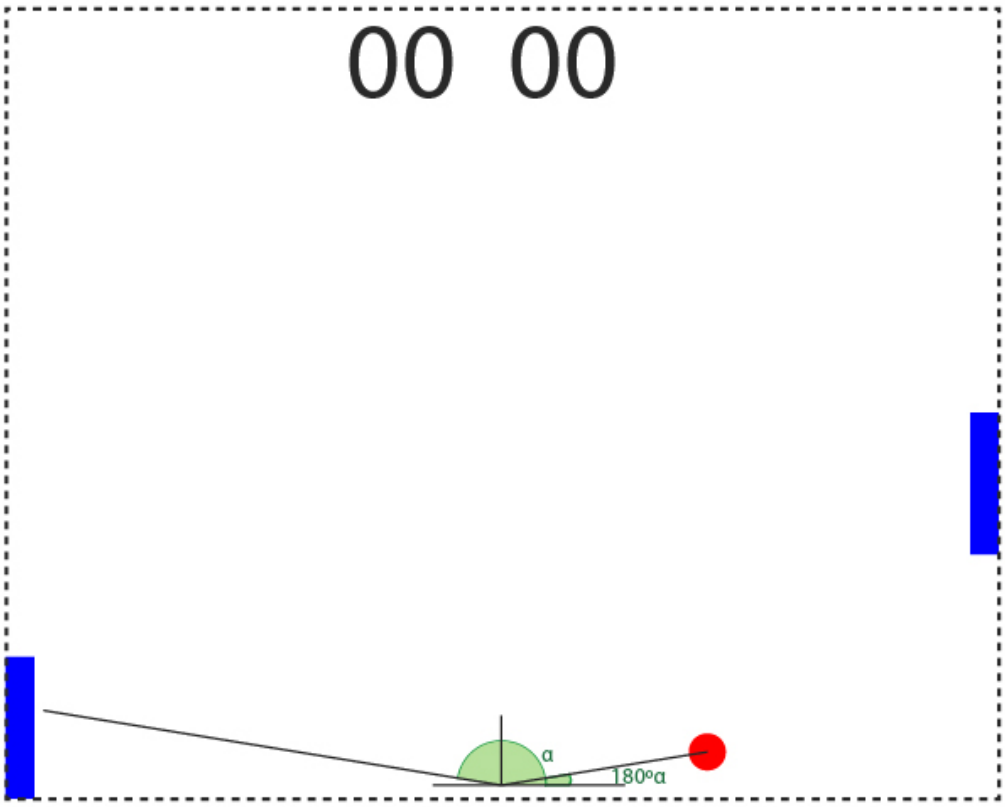
Figura 15



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesse caso, devemos criar uma nova reta sobre a qual a bola seguirá o seu trajeto. Essa nova reta passa pelo ponto onde a bola atinge a parede e segue com coefiente angular igual a $tg\ (180^{\circ}\alpha)$, sendo α o coeficiente angular da reta do início do movimento.

Figura 16



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para esse exemplo, imagine que $\alpha = 150^\circ = \frac{5\pi}{6} rad$ e que o ponto em que a bola toca a parede é o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{-9}{2})$, considerando o mesmo sistema de coordenadas da Figura 14. Então a reta que descreve a trajetória inicial da bola tem coeficiente angular $m = tg\, 150^o = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e essa reta passa pelo ponto $(\frac{1}{2}, \frac{-9}{2})$. Essa reta, então, terá equação

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}-9}{6}.$$

Depois da colisão com a parede, a nova trajetória da bola será ao longo da reta de coeficiente angular $m = tg\, 180^o - 150^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e que também passa pelo ponto $(\frac{1}{2}, \frac{-9}{2})$. Essa reta terá equação

$$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}-9}{6}.$$

Com isso, a bola terá a sua trajetória alterada.

Quando a bola colide com o jogador, devemos mudar o sentido horizontal do seu movimento e sua trajetória será representada por uma nova reta. Para adicionar um pouco de randomização ao jogo (RNG), essa nova reta é criada, como no começo, com um ângulo aleatório. Para que o jogador também possa influenciar o movimento de alguma maneira, definimos o sinal do coeficiente angular baseado na direção em que o jogador estava se movendo ao encostar na bola. Se ele tivesse se movendo para cima, a reta sobre a qual a bola se moverá terá coeficiente angular positivo. Caso contrário, o coeficiente angular será negativo. Você consegue ver o que isso influenciará no movimento? Vimos ao longo da aula que, se a reta tem um coeficiente angular positivo, o y crescerá junto com o x (a reta é crescente). Caso contrário, o y irá decrescer quando o x aumentar. A direção do movimento sobre a reta é definida por outra constante, que é invertida cada vez que há o contato com um jogador.

Percebeu como fica mais simples entender o jogo de Pong uma vez que entendemos melhor a matemática envolvida? Espero que tenham gostado do exemplo! Vamos jogar mais um pouco!

Resumo

Nesta aula aprendemos como obter equações que descrevem um conjunto de pontos alinhados, isto é, uma reta. Vimos três tipos de equações da reta: a equação reduzida e a equação geral da reta, que são únicas, e equações paramétricas. Vimos que é possível obter mais de uma parametrização para uma mesma reta. Aprendemos como verificar se três pontos estão alinhados e se um ponto pertence a uma reta. Conhecemos as posições relativas de duas retas e aprendemos a calcular o ângulo entre retas. Além disso, vimos que as retas podem ser utilizadas para descrever trajetórias de objetos e personagens dentro de um ambiente virtual.

Autoavaliação

Para que você avalie o seu aprendizado, após estudar essa aula você deve se fazer os questionamentos a seguir:

01 - Eu consigo escrever a equação de uma reta a partir de quais informações?

02 - Dados dois pontos, eu consigo obter a equação geral da reta que passa por esses pontos?

03 - Eu sou capaz de identificar se determinados objetos estão alinhados, dadas as suas localizações no plano?

04 - Dados um ponto e um coeficiente angular, eu consigo obter a equação reduzida da reta que passa no ponto dado e tem o coeficiente angular dado?

05 - Dada a equação de uma reta (geral ou reduzida) eu sou capaz de obter uma parametrização para a reta?

06 - Eu sei determinar as posições relativas de duas retas? E de um ponto e uma reta?

07 - Eu sou capaz de encontrar o ângulo formado entre duas retas concorrentes? E seu ponto de interseção?

08 - Ao posicionar um objeto no plano, eu sou capaz de descrever uma trajetória retilínea para esse objeto?

09 - 9) Eu sou capaz de detectar a interseção de trajetos retilíneos?

Referências

Dunn, Fletcher, and Ian Parberry. **3D math primer for graphics and game development**. CRC Press, 2011.