

# Física Aplicada a Jogos

## Aula 05 - Colisões

# Apresentação

---

Nesta aula, ao entendermos a lei de conservação do momento linear, vamos analisar diferentes situações que ficariam difíceis se tentássemos utilizar diretamente as leis de Newton. Entre essas situações, estão os problemas que envolvem colisões. Vamos conhecê-las?

## Objetivos

- Aprender a solucionar problemas em que dois corpos se chocam;
- Aprender a distinguir os diferentes tipos de colisões;
- Identificar situações reais onde essas colisões ocorrem.

# 1 - Introdução

---

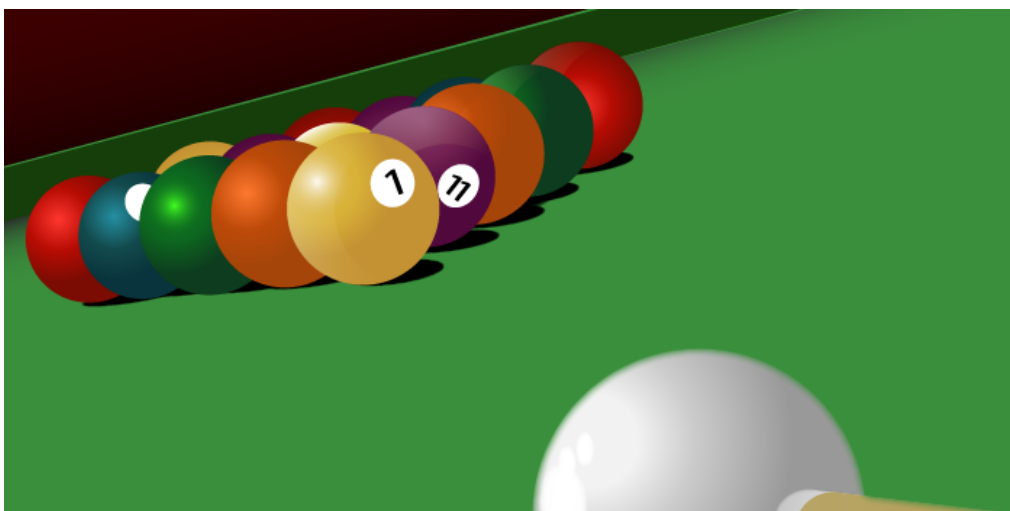
O termo *colisão* muitas vezes é associado a algum desastre envolvendo automóveis. No entanto, as colisões abrangem um largo espectro de situações, como bolas que colidem em uma mesa de bilhar, partículas que se chocam em um reator nuclear e o impacto de um meteoro na superfície terrestre.

Chamamos de colisão qualquer interação entre objetos que se tocam enquanto ao menos um deles está em movimento e ambos têm alterados um ou mais atributos de seus vetores velocidade (módulo, direção e/ou sentido).

O estudo das *colisões* é de fundamental importância para a criação de games realistas e coerentes com o mundo real. Observamos em muitos jogos, sobretudo os antigos, várias coisas bizarras decorrentes da falta de uma física consistente com a realidade. Em alguns jogos de corrida, observamos capotagens exageradas ou carros que voam ao colidirem. Dessa forma, é muito importante o entendimento da física das colisões para o desenvolvimento de jogos coerentes com a realidade.

Uma das aplicações mais importantes do conceito de movimento é encontrada no estudo de interações de curta duração, entre partes de um sistema, como ocorre em uma explosão ou colisão.

**Figura 01** - Ilustração representando a colisão entre bolas de bilhar.



**Fonte:** Adaptado de <http://www.culturamix.com/cultura/diferencas-entre-bilhar-e-sinuca>.  
Acesso em: 27 out. 2015.

Seja numa colisão frontal ou oblíqua, os vetores velocidade das bolas serão tais que a quantidade de movimento total, antes e depois da colisão, permanecerá constante.

As quantidades de movimento do sistema são iguais (em módulo, direção e sentido) antes e depois da colisão. Ou seja, a quantidade de movimento total,  $Q$ , do sistema constituído pelos dois objetos que colidiram se conservou durante a colisão.

Quando dois objetos colidem, como no choque entre as duas bolas de bilhar, pode ocorrer que a direção do movimento desses objetos não se altera pelo choque, isto é, eles se movimentam sobre uma reta antes e depois da colisão. Chamamos isso de colisão direta ou choque unidimensional.

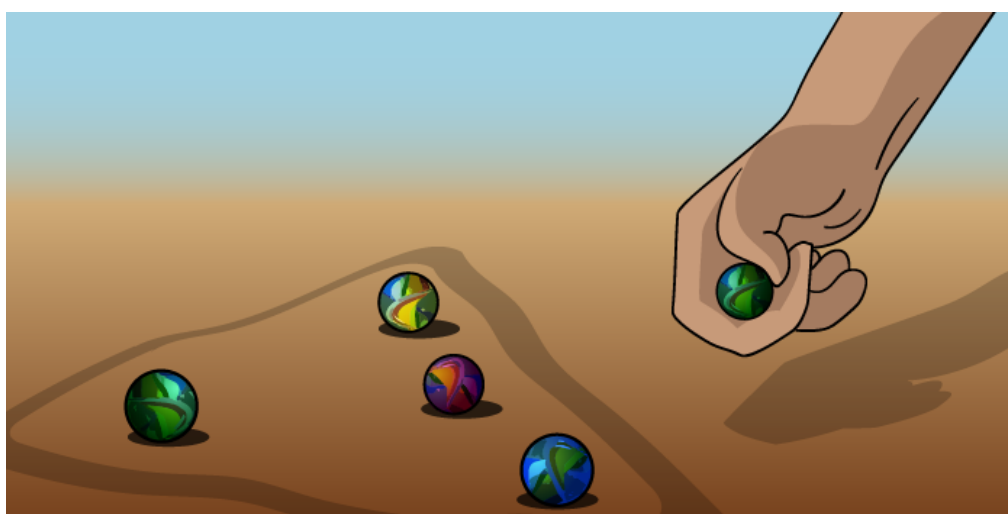
## 2 - Tipos de colisão

---

### 2.1 Colisão Elástica

Uma colisão elástica em um sistema isolado é aquela na qual existe conservação da energia cinética (e do momento linear). Assim, nessa colisão, a energia cinética total tem o mesmo valor antes e depois do choque. Um exemplo é a colisão de duas bolas de bilhar, que realizam colisões as quais podem ser consideradas praticamente elásticas.

**Figura 02** - Uma colisão entre duas bolas de gude é quase completamente elástica.

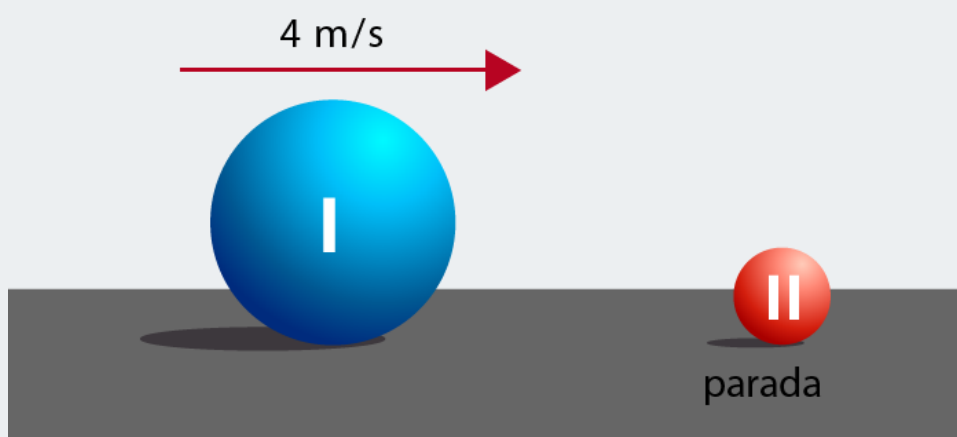


**Fonte:** Adaptado de <http://casa.hsw.uol.com.br/bola-de-gude1.htm>. Acesso em: 27 out. 2015.

Uma colisão elástica ocorre quando as forças que atuam entre os corpos que colidem são conservativas.

## Exercício Resolvido

Uma pequena esfera (I), de massa **0,3 kg**, move-se a **4m/s** e colide elástica e frontalmente com a esfera (II), em repouso, de massa **0,1 kg**. Logo após a colisão, quais são as velocidades das esferas?



**Fonte:** Elaborado pelo autor.

Como se trata de uma colisão elástica, tanto a energia cinética como a quantidade de movimento se conservam. Para acharmos as duas velocidades após a colisão, precisaremos de um sistema com duas equações para resolver.

**Passo 1:** Como a quantidade de movimento se conserva, temos:

$$Q_I = Q_F$$

$$m_1 * v_{1i} + m_2 * v_{2i} = m_1 * v_{1f} + m_2 * v_{2f}$$

Agrupando as informações de cada um dos corpos em cada lado da equação, temos:

$$m_1 * v_{1i} - m_1 * v_{1f} = m_2 * v_{2f} - m_2 * v_{2i}$$

$$(I) \quad m_1 * (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 * (v_{2f} - v_{2i})$$

**Passo 2:** Como a colisão é elástica, a energia também se conserva, logo:

$$E_{cI} = E_{cF}$$

$$\frac{(m_1 * v_{1i}^2)}{2} + \frac{(m_2 * v_{2i}^2)}{2} = \frac{(m_1 * v_{1f}^2)}{2} + \frac{(m_2 * v_{2f}^2)}{2}$$

Cortando o divisor 2 comum aos dois lados, temos:

$$m_1 * v_{1i}^2 + m_2 * v_{2i}^2 = m_1 * v_{1f}^2 + m_2 * v_{2f}^2$$

De forma similar à equação 1, vamos agrupar as informações do mesmo corpo em lados diferentes da equação:

$$m_1 * v_{1i}^2 - m_1 * v_{1f}^2 = m_2 * v_{2f}^2 - m_2 * v_{2i}^2$$

$$m_1 * (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 * (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

Aplicando a propriedade do produto notável  $(a+b)*(a-b) = a^2 - b^2$ , podemos expressar essa equação da seguinte forma:

$$(II) \quad m_1 * (v_{1i} + v_{1f}) * (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 * (v_{2f} + v_{2i}) * (v_{2f} - v_{2i})$$

**Passo 3:** Dividindo a equação II pela equação I, temos:

$$\frac{m_1 * (v_{1i} + v_{1f}) * (v_{1i} - v_{1f})}{m_1 * (v_{1i} - v_{1f})} = \frac{m_2 * (v_{2f} + v_{2i}) * (v_{2f} - v_{2i})}{m_2 * (v_{2f} - v_{2i})}$$
$$(v_{1i} + v_{1f}) = (v_{2f} + v_{2i})$$

Substituindo os valores dados no enunciado de  $v_{1i}$  e  $v_{2i}$ , temos:

$$4 + v_{1f} = v_{2f} + 0$$

$$(III) \quad v_{2f} = v_{1f} + 4$$

Substituindo o valor de  $v_{2f}$  na equação I temos:

$$m_1 * (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 * (v_{1f} + 4 - v_{2i})$$

Agora vamos colocar os valores fornecidos no enunciado do problema:

$$0,3 * (4 - v_{1f}) = 0,1 * (v_{1f} + 4 - 0)$$

$$1,2 - 0,3v_{1f} = 0,1v_{1f} + 0,4$$

$$0,4v_{1f} = 0,8$$

$$v_{1f} = \mathbf{2 \text{ m/s}}$$

Substituindo esse valor na equação III:

$$v_{2f} = 2 + 4$$

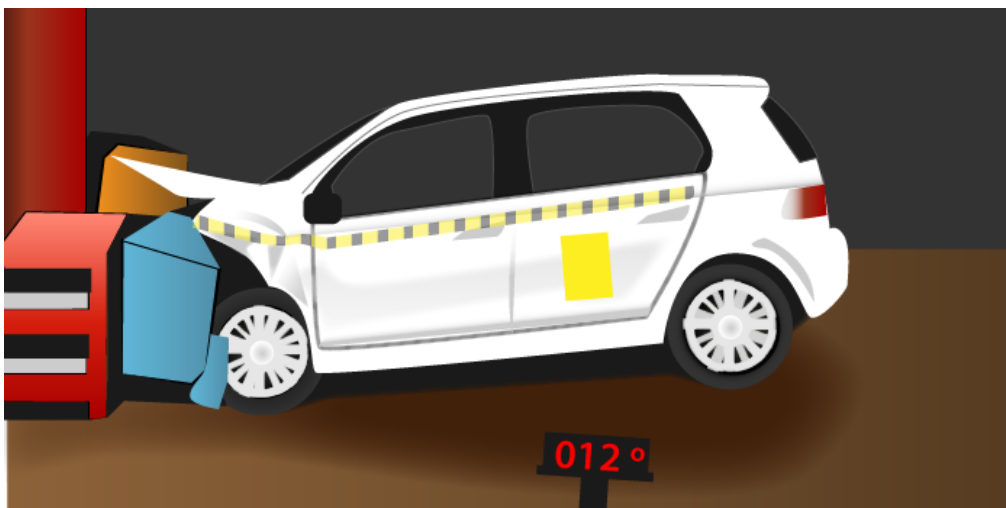
$$v_{2f} = \mathbf{6 \text{ m/s}}$$

## 2.2 - Colisão Inelástica

---

Quando os objetos apresentarem deformações permanentes em virtude da colisão, verificamos que haverá uma redução na energia cinética do sistema, pois uma parte dessa energia foi utilizada para produzir as deformações ou foi convertida em energia térmica.

**Figura 03** - Colisão entre carro de testes e obstáculos, caracterizando uma colisão inelástica.



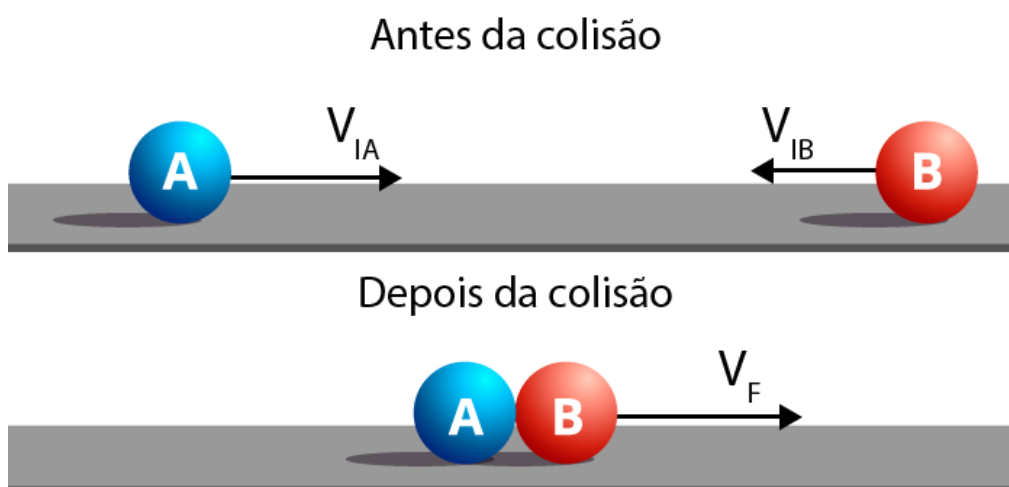
**Fonte:** Adaptado de <http://www.alunosonline.com.br/fisica/tipos-colisoos.html>. Acesso em: 26 out. 2015.

Portanto, uma colisão na qual a energia cinética total do sistema depois da colisão é menor do que antes da colisão denomina-se **colisão inelástica**.

## 2.3 - Colisão Completamente Inelástica

Ocorre quando os corpos permanecem unidos e se movem como um único corpo depois da colisão.

**Figura 04** - Após esse tipo de colisão, os objetos seguem juntos como se fossem um único corpo.



**Fonte:** Adaptado de <http://www.mundoeducacao.com/upload/conteudo/colis%C3%A3o%20inel%C3%A1stica.jpg>.



Agora vamos examinar o que ocorre com a energia cinética e com o momento linear em uma colisão completamente inelástica entre dois corpos (A e B).

Como os dois corpos ficam colados depois da colisão, eles devem possuir a mesma velocidade final  $\vec{v}_2$ :

$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_2$$

A lei de conservação do momento linear fornece a relação:

$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} = (m_A + m_B) \vec{v}_2$$

Conhecendo os valores das massas e as velocidades iniciais, podemos calcular a velocidade final comum  $\vec{v}_2$ .

Suponha que um corpo de massa  $m_A$  e com velocidade  $v_{A1}$  colide inelasticamente com um outro corpo de massa  $m_B$  que está inicialmente em repouso ( $v_{B1} = 0$ ). Pela equação acima, o componente da velocidade final  $v_2$  dos dois corpos depois da colisão é dado por:

$$v_2 = \frac{m_A * v_{A1} + m_B * v_{B1}}{m_A + m_B}$$

$$v_2 = \frac{m_A * v_{A1} + 0}{m_A + m_B}$$

$$v_2 = \frac{m_A * v_{A1}}{m_A + m_B}$$

A energia cinética total depois da colisão completamente inelástica é menor do que antes da colisão.

A razão entre a energia cinética final e a energia cinética inicial é dada por:

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

O membro direito dessa equação é sempre menor do que um porque o denominador é sempre maior do que o numerador.

### 3 -A Física e os Jogos Digitais

---



Para o desenvolvimento do game Wreckfest (<http://nextcargame.com/>), os desenvolvedores passaram centenas de horas analisando situações reais de colisões — vendo vídeos, assistindo a corridas ao vivo e até indo a um ferro-velho, pegando os carros e batendo uns nos outros para ver como eles se comportavam. Isto foi necessário porque eles queriam levar em conta fatores como o peso do veículo, o ângulo e a velocidade das colisões e a estrutura de cada um dos veículos.

Fonte: <https://www.youtube.com/embed/2wlobFMBm3M>

Esse vídeo demonstra a eficácia do motor de física desenvolvido pela equipe de desenvolvedores de games *Bugbear Entertainment* para a descrição precisa e coerente das colisões entre carros e objetos.

## 4 - Conservação da quantidade de movimento nas colisões

---

A energia cinética total nem sempre se conserva em uma colisão. No entanto, se calcularmos a quantidade de movimento total dos objetos, antes e depois de colidirem, verificaremos, qualquer que seja a colisão, que essa quantidade de movimento se conserva.

A quantidade de movimento total de um sistema de objetos que colidem, imediatamente antes da colisão, é igual à quantidade de movimento total do sistema imediatamente após a colisão.

### Exercício Resolvido

Em uma mesa de sinuca, a bola branca, de massa  $m$ , movendo-se com velocidade  $v = 2,0m/s$ , atinge a bola amarela que estava em repouso. Supondo que o choque seja central e elástico, determine a velocidade das duas bolas após a colisão.

Sejam  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  as velocidades das bolas branca e amarela, após a colisão. A quantidade de movimento do sistema (das duas bolas), antes do choque, era  $m\vec{v}$ , pois apenas a bola branca estava em movimento. Como em qualquer colisão há conservação da quantidade de movimento total, podemos escrever:

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

Já que o choque é central, os vetores  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  têm a mesma direção e, portanto, a relação anterior poderá ser escrita em notação escalar, isto é:

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2$$

$$v = v_1 + v_2$$

$$v_1 + v_2 = 2,0$$

Tratando-se de uma colisão elástica, a energia cinética do sistema se conserva. Logo:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2$$

$$v_1^2 + v_2^2 = 4,0$$

Obtivemos, assim, duas equações, relacionando as incógnitas  $v_1$  e  $v_2$ :

$$v_1 + v_2 = 2,0$$

$$v_1^2 + v_2^2 = 4,0$$

Da primeira equação,  $v_1 = 2,0 - v_2$ , substituindo-a na segunda:

$$(2,0 - v_2)^2 + v_2^2 = 4,0$$

Resolvendo essa equação, obtemos  $v_2 = 2,0m/s$  e, como  $v_1 = 2,0 - v_2$ , concluímos que  $v_1 = 0$ .

Note que, por causa da colisão, a bola branca entra em repouso e a bola amarela adquire uma velocidade igual à que a bola branca possuía antes do choque.

## 5 - Resumo

---

Nesta aula estudamos o que ocorre quando dois corpos se chocam. Aprendemos a distinguir os diferentes tipos de colisão, como a colisão elástica, a colisão inelástica e a colisão completamente inelástica. Estudamos também situações reais onde essas colisões ocorrem.

## 6 - Leituras complementares

---

FEYNMAN, R. P. **Física em seis lições**. Rio de Janeiro: Ediouro, 1999.

PALMER, Grant. **Physics for game programmers**. Apress, 2005.

HEWITT, P. G. **Física conceitual**. Porto Alegre: ArtMed/ Bookman, 2001.

## 7 - Referências Bibliográficas

---

FLATOUT. Disponível em: <<http://www.flatout.com.br/>>. Acesso em: 01 jun. 2015.

FUKE, Luiz Felipe; KAZUHITO Yamamoto. , 3. Ed. São Paulo: Saraiva, 2013. 1 v.

GASPAR, Alberto. **Física**. São Paulo: Ática, 2009. 1 v.

MÁXIMO, A.; ALVARENGA, B. **Física contexto e aplicações**, 1. ed. São Paulo: Editora Scipione, 2013. 1 v.

NEXT car game. Disponível em: <<http://nextcargame.com/>>. Acesso em 01 jun. 2015

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R.A. **Física I: Mecânica**. Tradução de Sonia Midori Yamamoto. 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2008.