

Conceitos de Eletricidade

Aula 04 - Teorema da Superposi o

Apresentação

Nesta aula mostraremos os conceitos de divisor de tensão e corrente como ferramentas para facilitar a análise de circuitos elétricos e será apresentado o teorema da superposição.

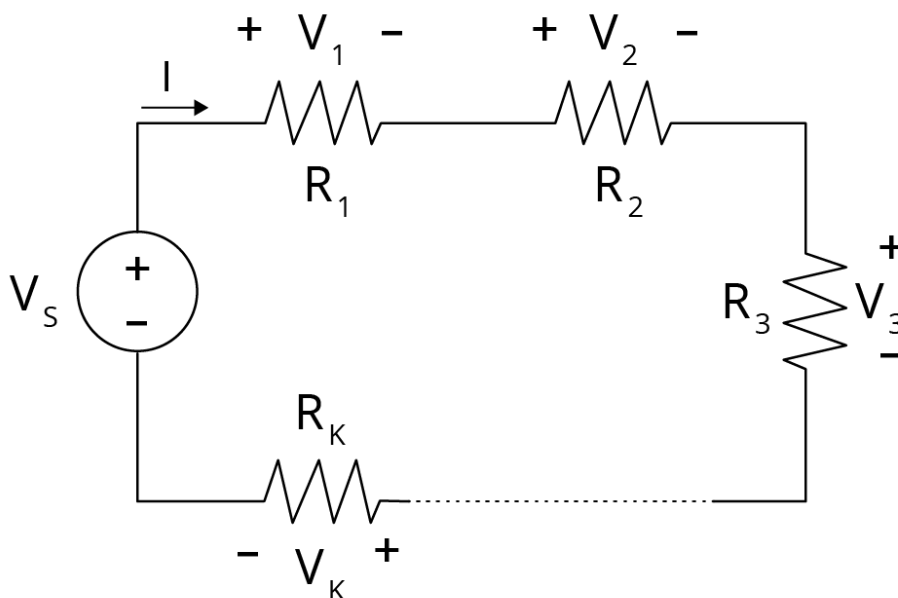
Objetivos

- Aprenderemos sobre o divisor de tensão
- Aprenderemos sobre o divisor de corrente
- Abordaremos o Teorema da Superposição

Divisor de Tensão

O conceito do divisor de tensão traz no próprio nome sua função específica: dividir a tensão, recurso amplamente utilizados em diversos projetos de circuitos, pois a tensão de saída é proporcional a tensão de entrada do circuito. Para entender melhor vamos analisar a figura 01.

Figura 01 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

A queda de tensão em cada um dos terminais é dada por:

$$V_j = R_j I$$

onde $j = 1, 2, 3 \dots k$. Representa a queda de tensão no resistor. Assim aplicando a lei de Ohm no circuito da figura 01 temos que:

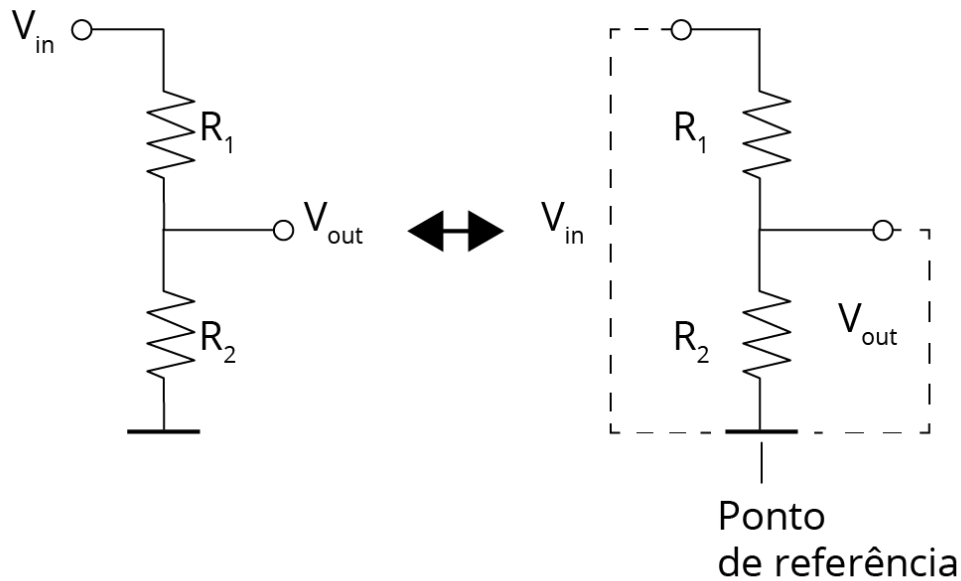
$$I = V_s / (R_1 + R_2 + \dots + R_k)$$

Substituindo a equação 01 em 02, temos:

$$V_j = (R_j / (R_1 + R_2 + \dots + R_k)) V_s$$

A equação 03 representa uma equação geral para encontrar o valor da queda de tensão em um determinado terminal de um circuito. Analisando o circuito da figura 02, podemos entender melhor o uso do divisor de tensão.

Figura 02 - Divisor de tensão.



Fonte: Autoria própria.

Aplicando a equação 03 nesse circuito temos:

$$V_2 = V_{out} = (R_2 / (R_1 + R_2)) * V_{in}$$

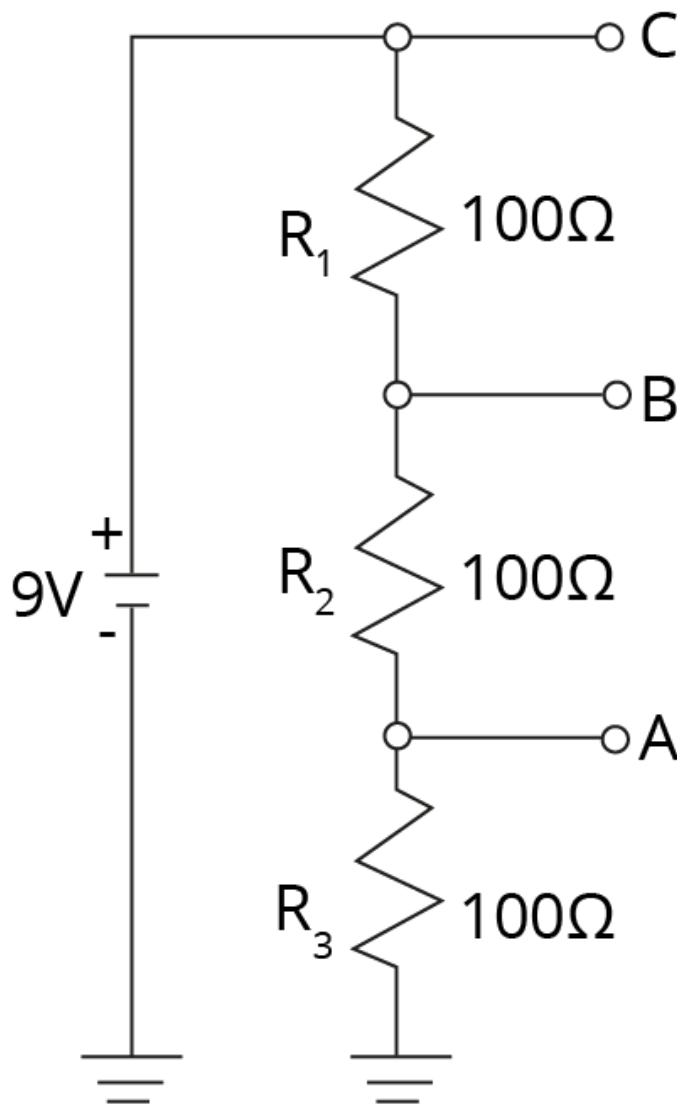
Foi fácil de entender a equação 04? Em geral o que devemos analisar é:

- A tensão no qual o resistor está submetido, no caso do exemplo da figura 02 o resistor R_2 .
- A tensão total do circuito, no caso a que vamos dividir (V_{in}).
- A quantidade de resistências no circuito, como vemos na equação 03 elas serão fundamentais para a divisão.

Exemplo 01:

Vamos analisar a divisão de tensão no circuito da figura abaixo, e calcular V_a , V_b e V_c :

Figura 03 - Circuito elétrico



Fonte: Autoria própria.

Aplicando a equação 03 temos:

$$V_A = \left(\frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right) * V$$

$$V_A = \left(\frac{100}{100 + 100 + 100} \right) * 9 = 3V$$

$$V_B = \left(\frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right) * V = \left(\frac{200}{300} \right) * 9 = 6V$$

$$V_C = \left(\frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \right) * V = \left(\frac{300}{300} \right) * 9 = 9V$$

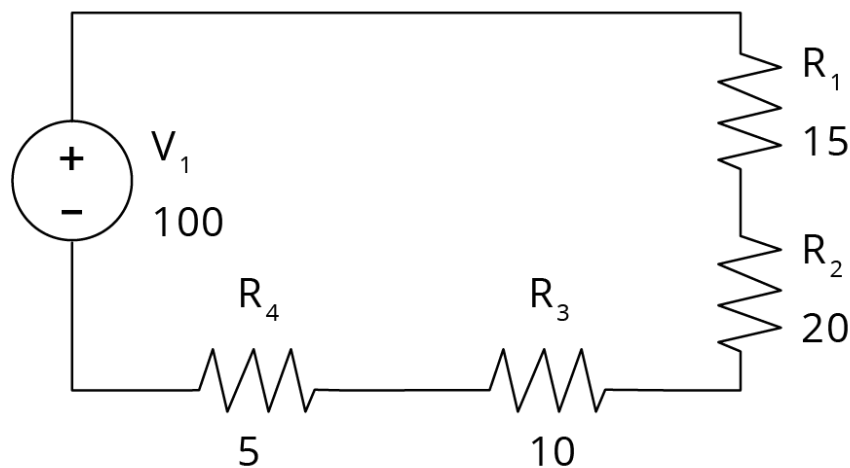
Acho que não precisava calcular o V_{c1} , não é? Perceberam que os valores da tensão diminuem a medida que aumenta a relação de resistências?

Vamos praticar um pouco mais?

Exemplo 02:

Dado o circuito da figura 04 abaixo, vamos analisar a tensão em R4.

Figura 04 - Circuito elétrico



Fonte: Autoria própria.

Usando os conceitos apresentados temos que:

$$V_4 = (R_4 / (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)) * V_1$$

$$V_4 = \left(\frac{5}{50} \right) * 100 = 10V$$

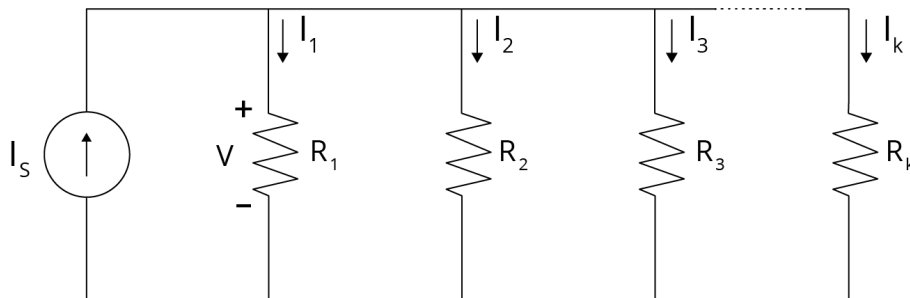
Atividade 01

1. Testando os conhecimentos, usando como base o circuito da figura 04, qual a tensão em R2?

Divisor de Corrente

Pensando no que vimos sobre o divisor de tensão, é possível imaginar como seria o divisor de corrente? Respondendo a pergunta, o divisor de corrente seria da mesma forma, agora utilizando os conceitos de corrente. Para exemplificar melhor, vamos utilizar o circuito da figura 05.

Figura 05 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

Vocês ainda se lembram da condutância? Assunto mostrado na aula de Noções de Eletricidade - Primeiros passos II. Lembram que ela é o inverso da Resistência e que é descrita dessa forma:

$$G = 1/R$$

Assim, podemos reescrever a 1º lei de Ohm da seguinte forma:

$$V = R * I \rightarrow I = 1/R * V \rightarrow I = GV$$

$$I_j = G_j V$$

onde $j = 1, 2, 3 \dots k$. Podemos ver que a tensão é a mesma em todo o circuito, assim podemos reescrever da seguinte forma:

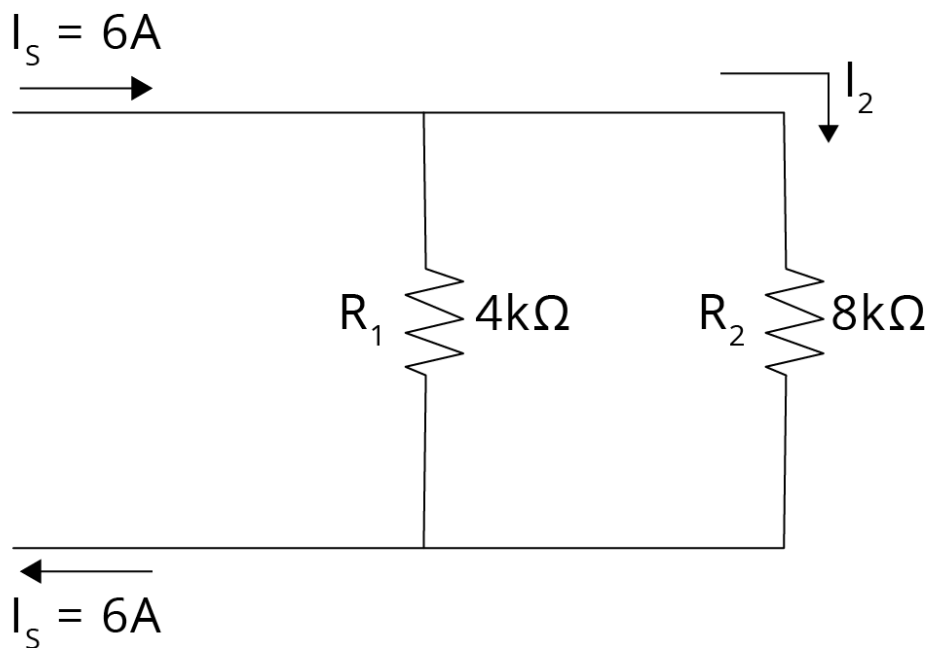
$$V = I / (G_1 + G_2 + \dots + G_k)$$

Substituindo a equação 06 na 05, temos:

$$I_j = (G_j / (G_1 + G_2 + \dots + G_k)) I$$

Para mostrar melhor o divisor de corrente vamos analisar o circuito da figura 06 e determinar o valor da corrente I_2 :

Figura 06 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

Aplicando a equação 07 temos:

$$I_2 = \left(\frac{1/R_2}{(1/R_1) + (1/R_2)} \right) I_s$$

Para resolver a expressão nos parênteses basta lembrar dos conceitos de serie e paralelo, assim podemos reescrever a equação 08 em função das resistências.

$$I_2 = \left(\frac{1/R_2}{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}} \right) I_s$$
$$\rightarrow I_2 = \left(\frac{1}{R_2} * \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} \right) I_s \rightarrow I_2 = \left(\frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) I_s$$

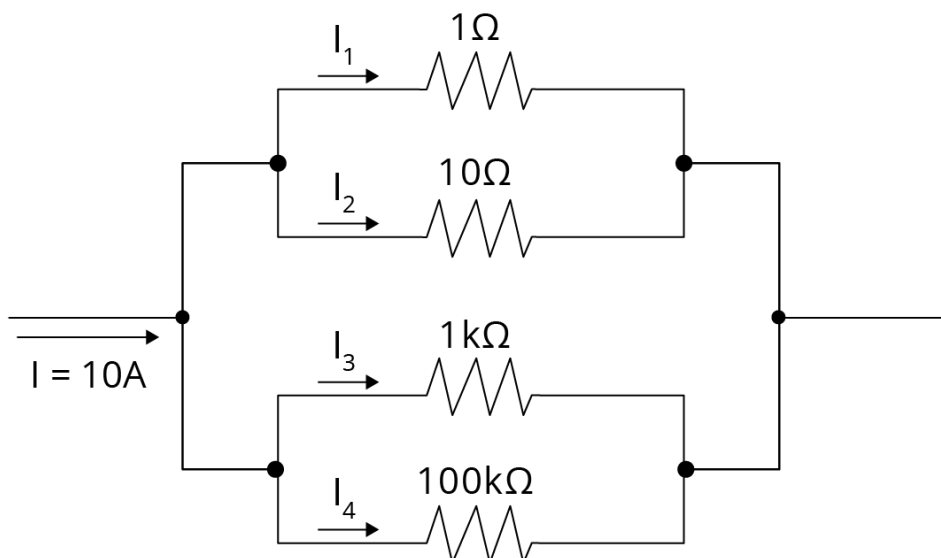
A equação exemplifica melhor o divisor de corrente, assim para resolver o circuito basta substituir:

$$I_2 = \left(\frac{4}{4 + 8} \right) 6 = 2A$$

Exemplo 03:

Vamos praticar usando como exemplo o circuito da figura 07 para calcular os valores das correntes em cada resistência.

Figura 07 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

Usando a equação 07 temos:

$$I_1 = \left(\frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{100K}} \right) 10 \rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{1,101} \right) 10 = 9,082A$$

$$I_2 = \left(\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{100K}} \right) 10 \rightarrow$$

$$\left(\frac{0,1}{1,101} \right) 10 = 0,908A \text{ ou } 908,2mA$$

$$I_3 = \left(\frac{\frac{1}{1000}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{100K}} \right) 10 \rightarrow$$

$$\left(\frac{0,001}{1,101} \right) 10 = 0,00908A \text{ ou } 9,08mA$$

$$I_4 = \left(\frac{\frac{1}{100K}}{\frac{1}{1} + \frac{1}{10} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{100K}} \right) 10 \rightarrow$$

$$\left(\frac{0,00001}{1,101} \right) 10 = 9,08 \times 10^{-5}A \text{ ou } 0,908\mu A$$

Podemos comprovar se o valor está correto usando a lei dos nós, assim:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 9,082 + 0,908 +$$

$$9,08 \times 10^{-3} + 9,08 \times 10^{-5} = 9,999A \cong 10A$$

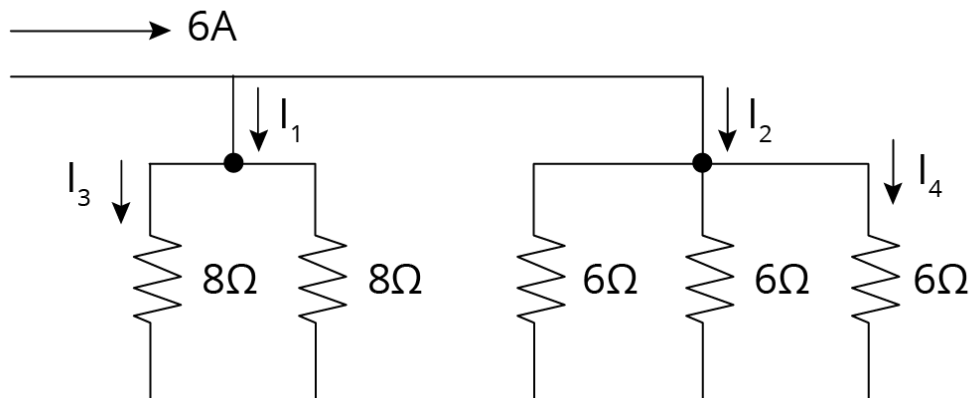
Lembraram da lei dos nós? Se não, vale a pena voltar ao capítulo que fala sobre ela, pois seu entendimento é fundamental para compreender o divisor de corrente.

Vamos fazer outro exemplo para fixar bem esse conceito.

Exemplo 04:

Vamos analisar a figura abaixo e calcular a corrente em cada resistor.

Figura 08 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

$$I_1 = \left(\frac{2}{2+4} \right) 6 = 2A$$

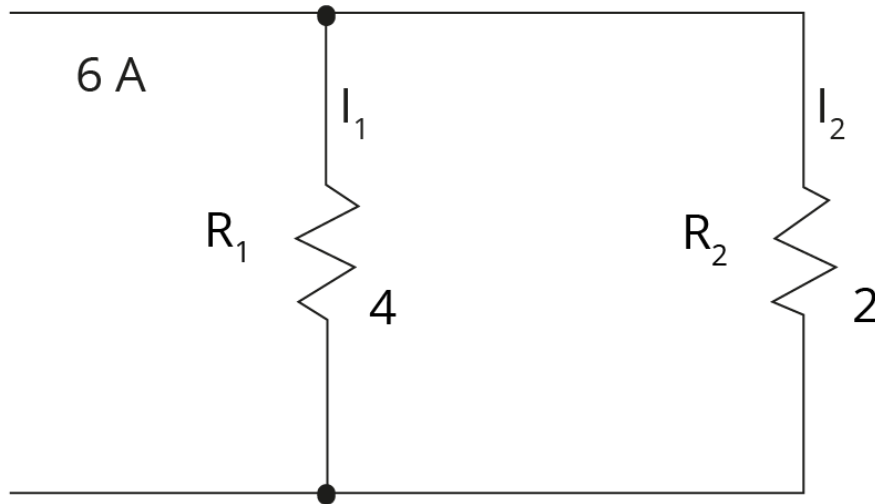
$$I_2 = \left(\frac{4}{2+4} \right) 6 = 4A$$

Ao analisarmos esse circuito verificamos que existem resistores iguais em paralelo, com isso, podemos tirar a seguinte conclusão baseado na **lei de Ohm**: se os resistores são iguais e, como podemos ver, estão submetidos ao mesmo potencial (tensão), a corrente tem que ser a mesma em cada ramo, correto? Assim podemos reescrever nosso circuito da seguinte forma:

$$I_3 = 1A$$

$$I_4 = 1,33A$$

Figura 09 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

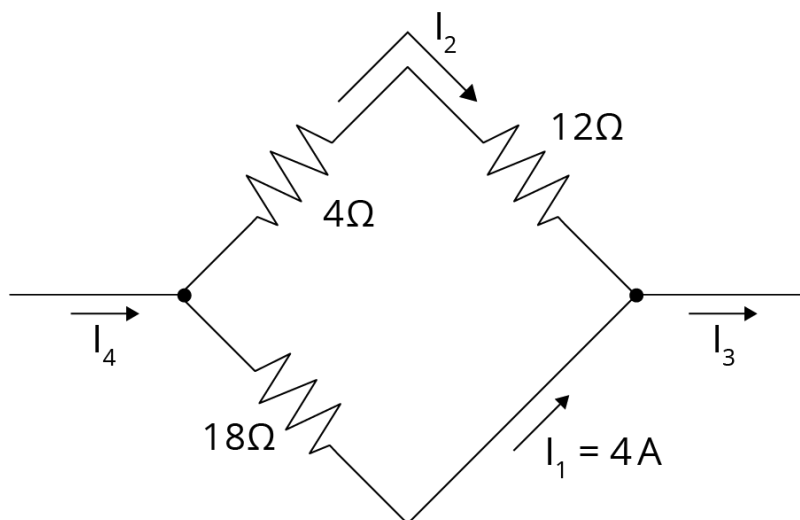
E agora quais são as correntes I_3 e I_4 ? Vamos pensar um pouco...

Se as resistências em cada ramo são iguais e, como vocês devem lembrar, as resistências se opõem a passagem da corrente, então é esperado que as correntes se dividam de forma igual em cada ramo, assim:

Atividade 02

1. Analise o circuito da figura 10 e calcule as correntes

Figura 10 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

Para checar sua resposta, [clique aqui](#).

RESPOSTA

$$I_2 = 4,5\text{ A}, I_3 = I_4 = 8,5\text{ A}$$

Teorema da Superposição

O teorema da superposição é usado para análise de circuitos elétricos, sua aplicação é para circuitos com mais de uma fonte de tensão ou corrente. É utilizado para analisar a influência de cada fonte de tensão no circuito elétrico.

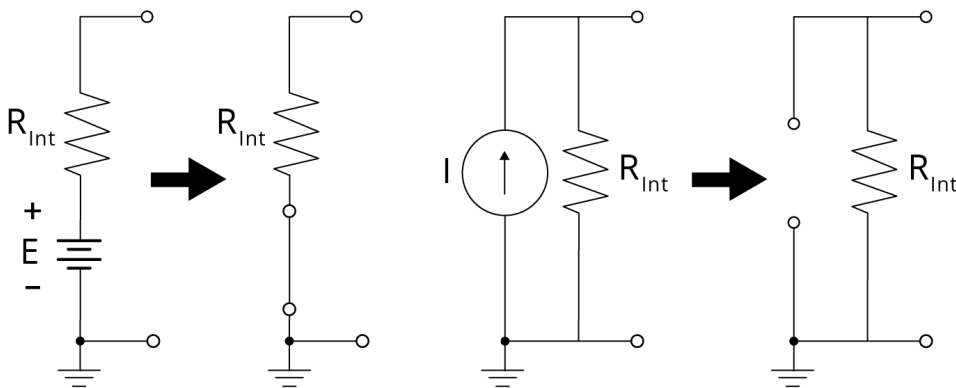
O teorema diz que *“a corrente ou tensão através de qualquer elemento é igual a soma algébrica das correntes ou tensões produzidas independentemente em cada fonte”*.

Na prática o que o teorema mostra é que é possível encontrar a solução do circuito para cada fonte individualmente depois somá-las e obter o resultado do circuito. Perceba que essa soma é **algébrica**, isso quer dizer que temos que analisar as polaridades das tensões e os sentidos das correntes dos circuitos na soma.

O procedimento para aplicar o teorema é:

1. Remover a fonte de tensão e substituir no diagrama por um curto-circuito (conexão direta).
2. Remover a fonte de corrente e substituir no diagrama por um curto-aberto.
3. Analisar a influência de cada uma das fontes do circuito individualmente e realizar a soma algébrica do resultado apresentado.

Figura 11 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

O princípio da superposição não deve ser aplicado para cálculo da potência fornecida há um circuito, já que essa variação é quadrática (x^2), portanto não-linear.

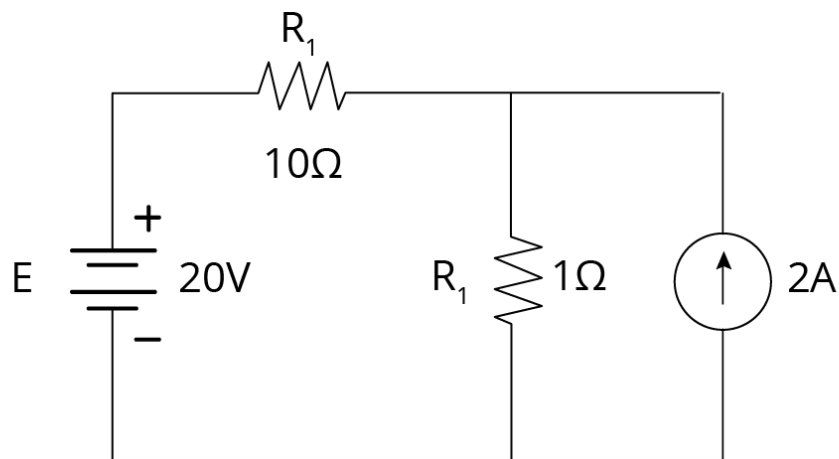
Para apresentar melhor o uso desse teorema, vamos utilizar vários exemplos onde serão colocados os conceitos em prática.

Exemplo 05

Usando o teorema da superposição determine:

- A corrente em R2
- Porque o teorema não pode ser utilizado para o cálculo de potência?

Figura 12 - Circuito elétrico.

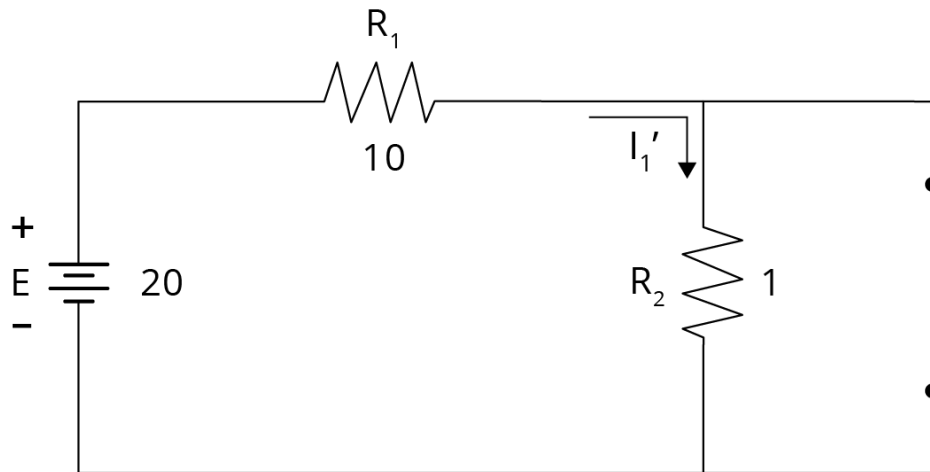


Fonte: Autoria própria.

- Para calcular a corrente utilizando o teorema vamos analisar inicialmente a influência da fonte de tensão no circuito. Para isso, precisamos transformar a fonte de corrente em circuito aberto e calcular a corrente sobre o resistor R2, como mostrado a seguir:

$$I'_1 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{20}{10 + 1} = 1,81A$$

Figura 13 - Circuito elétrico.

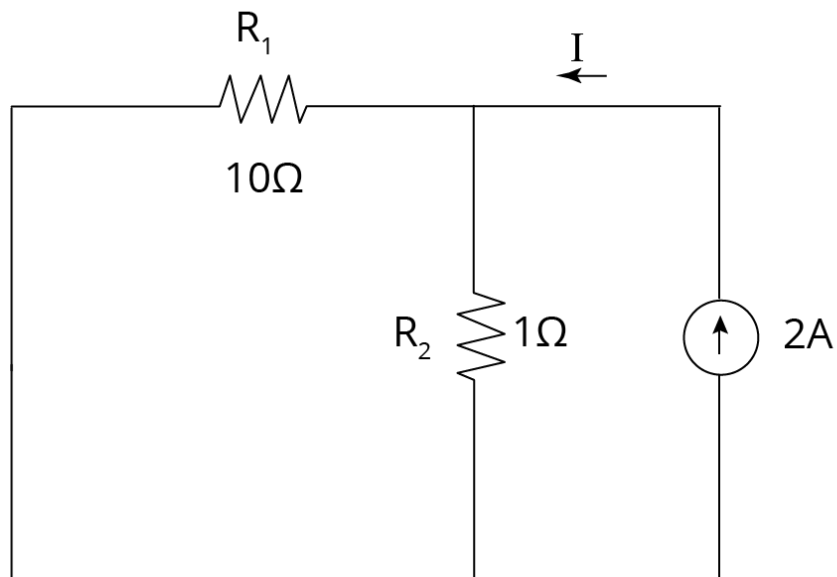


Fonte: Autoria própria.

- Podemos analisar a influência da fonte de corrente transformando a fonte de tensão em um curto-circuito. Assim, temos que calcular a corrente que passa pelo resistor R2, como mostrado a seguir:

$$I''_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} 1 = \frac{10}{10 + 1} 2 = 1,81A$$

Figura 14 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

Assim, o valor de corrente que passa pelo resistor R_2 é:

$$I_1 = I'_1 + I''_1 = 3,62A$$

b. Para calcular a corrente utilizando o teorema vamos analisar inicialmente a influência da fonte de tensão no circuito. Para isso, precisamos transformar a fonte de corrente em circuito aberto e calcular a corrente sobre o resistor R_2 , como mostrado a seguir:

- Cálculo pela contribuição de cada fonte:

$$P' = I_1'^2 \cdot R_2 = (1,81)^2 \cdot 1 = 3,27W$$

$$P'' = I_1''^2 \cdot R_2 = (1,81)^2 \cdot 1 = 3,27W$$

$$P'_T = P' + P'' = 6.55W$$

- Cálculo pela corrente total:

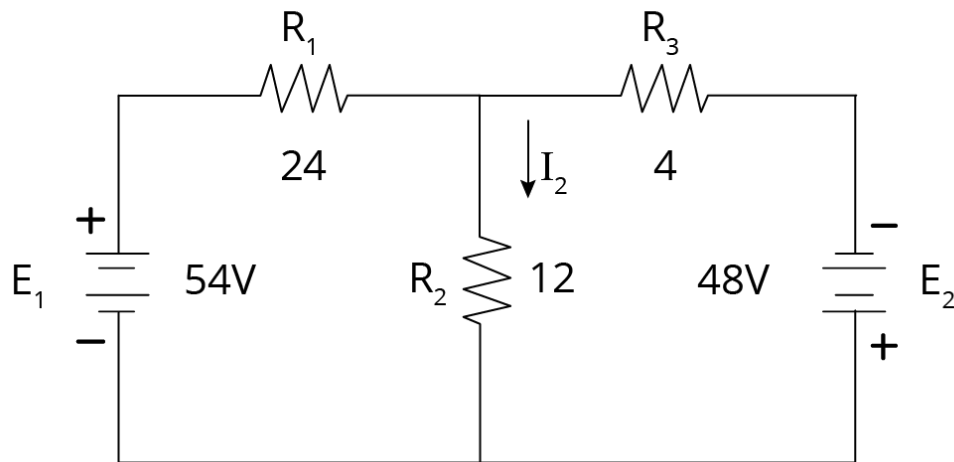
$$P_T = I_1^2 \cdot R_2 = (3,62)^2 \cdot 1 = 10,69W$$

Assim temos que $P_T \neq P'_T$.

Exemplo 06

Determine a corrente em R2 usando o teorema da superposição.

Figura 15 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

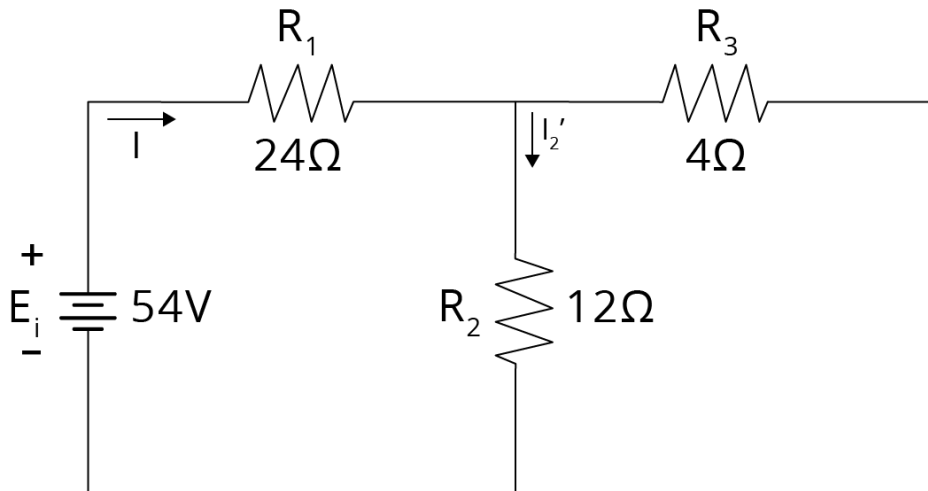
Analisando a fonte E1, temos:

$$R_T = R_1 + R_2 || R_3 = 24 + 12 || 4 = 24 + 3 = 27\Omega$$

$$I = \frac{E_1}{R_t} = \frac{54}{27} = 2A$$

$$I'_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} I = \frac{4}{4 + 12} 2 = 0,5A$$

Figura 16 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

Observação: O símbolo “ || ” mostrado no exemplo acima quer dizer que os dois resistores estão em paralelo, você percebeu? A partir de agora usaremos essa notação. Em caso de dúvida sobre o cálculo da resistência equivalente de resistores em paralelo é bom voltar ao material e dar uma olhada novamente nas aulas de Noções de Eletricidade.

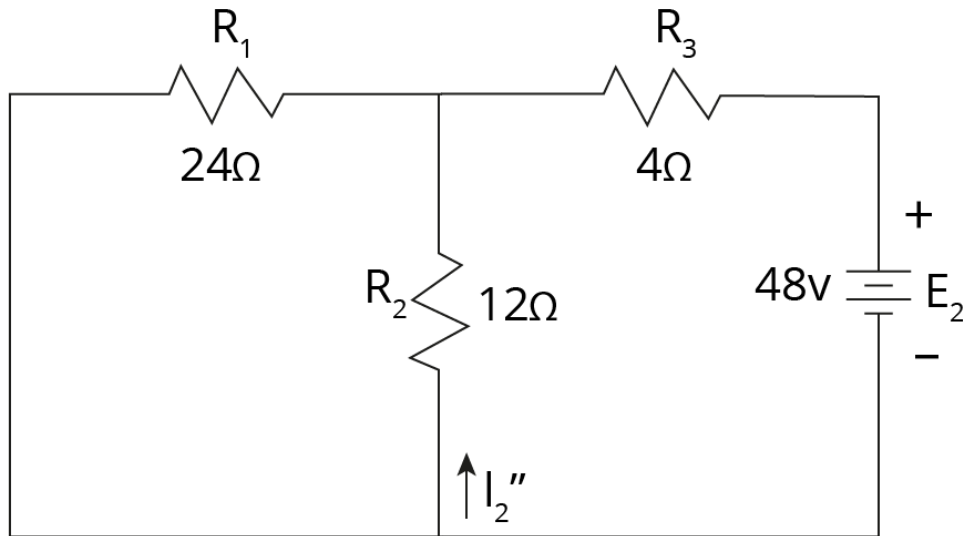
Analisando a fonte E_2 , temos:

$$R_T = R_3 + R_1 || R_2 = 4 + 12 || 24 = 12\Omega$$

$$I = \frac{E_2}{R_t} = \frac{48}{12} = 4A$$

$$I''_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{24}{24 + 12} 4 = 2,67A$$

Figura 17 - Circuito elétrico.

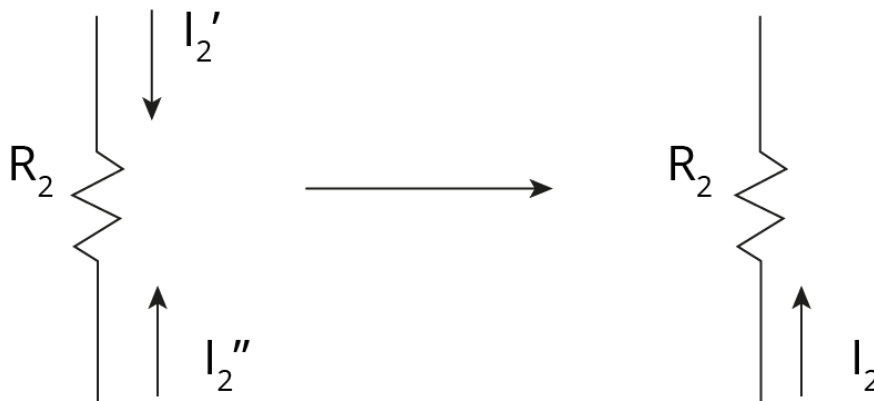


Fonte: Autoria própria.

Percebam que as correntes de I'_2 e I''_2 estão em sentidos contrários, assim:

$$I_2 = I''_2 - I'_2 = 2,67 - 0,5 = 2,17A$$

Figura 18 - Circuito elétrico.

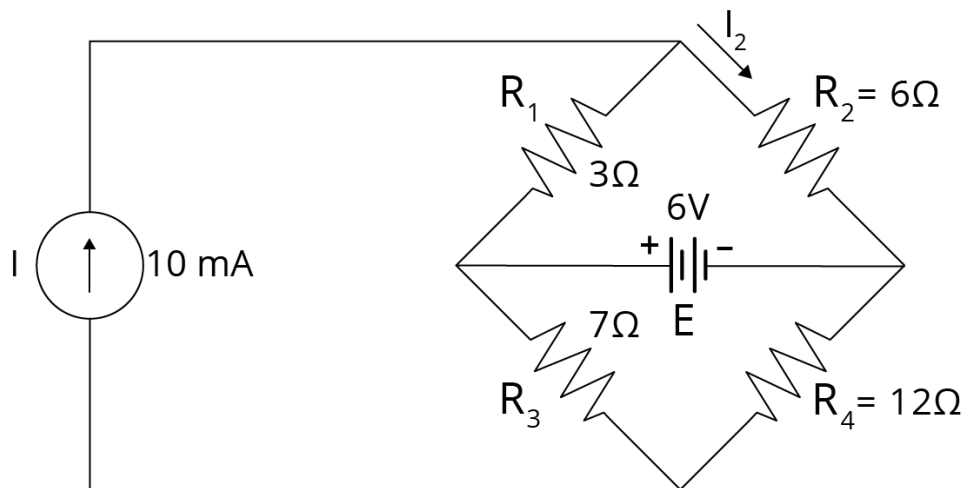


Fonte: Autoria própria.

Exemplo 07:

Calcule a corrente que passa em R2 no circuito da figura abaixo:

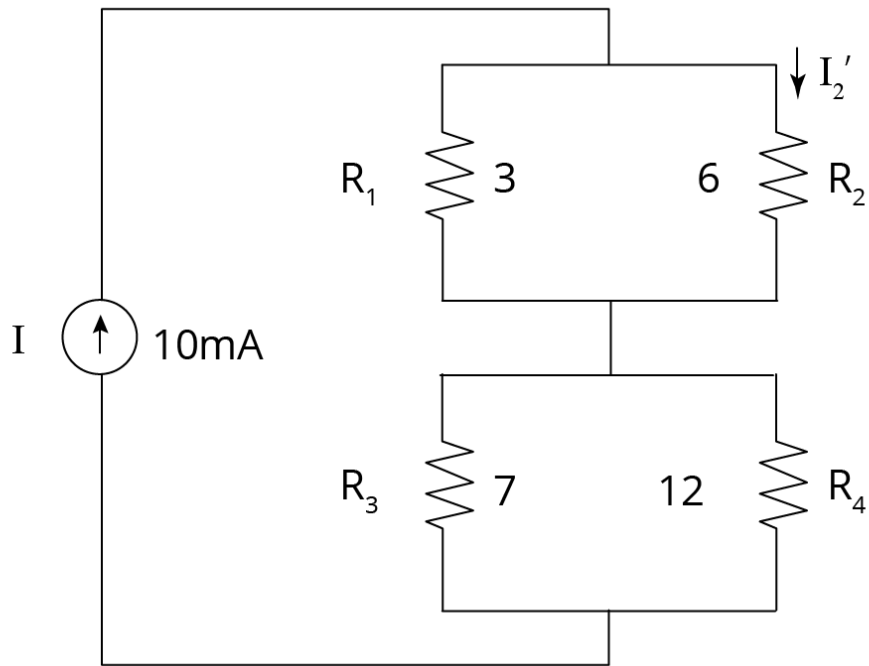
Figura 19 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

- Considerando o efeito da fonte de corrente:

Figura 20 - Circuito elétrico.

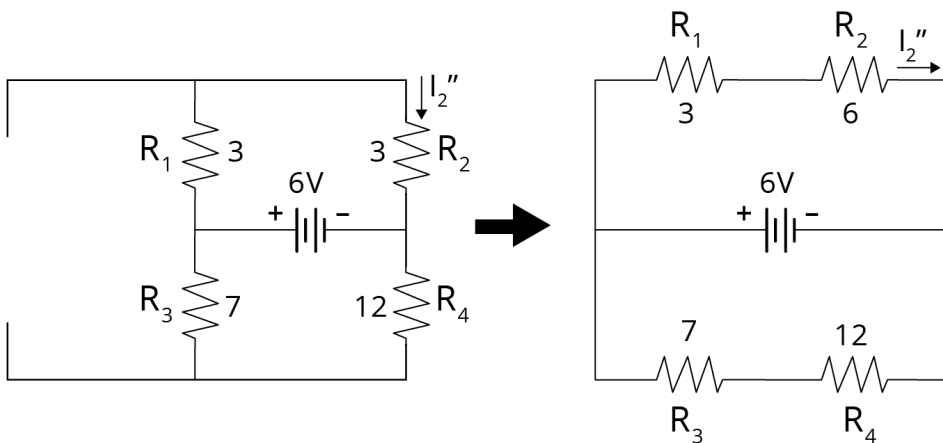


Fonte: Autoria própria.

$$I'_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{3}{3 + 6} 10 = 3,33mA$$

- Considerando o efeito da fonte de tensão

Figura 21 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

$$I''_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{6}{3 + 6} = 0,66A$$

Assim,

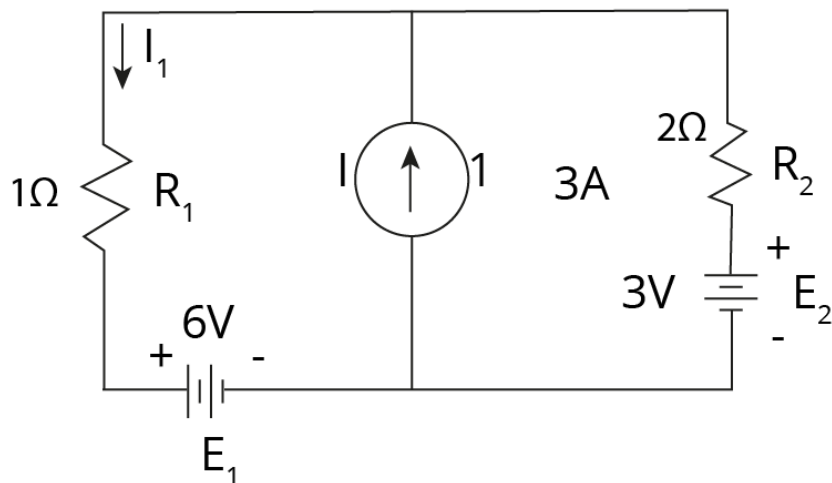
$$I_2 = I'_2 + I''_2 = 3,33mA + 0,66A \simeq 0,6633A$$

Observem que para resolver esse exemplo “aparentemente” complicado, foi necessário apenas reorganizar os circuitos, e aplicar princípios básicos para resolução.

Exemplo 08:

Calcule a corrente que passa em R1 no circuito da figura abaixo.

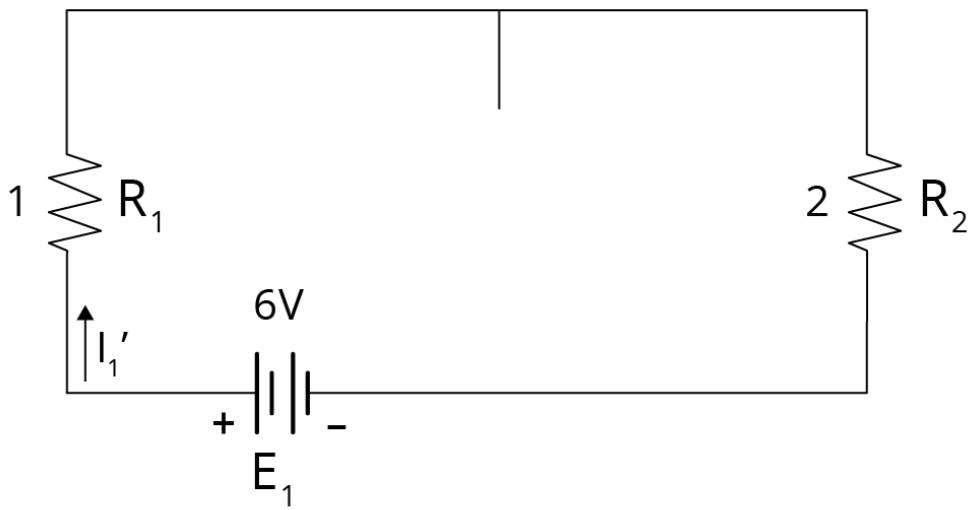
Figura 22 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

- Como há 3 fontes, vamos realizar três análises. Analisando a fonte E1:

Figura 23 - Circuito elétrico.

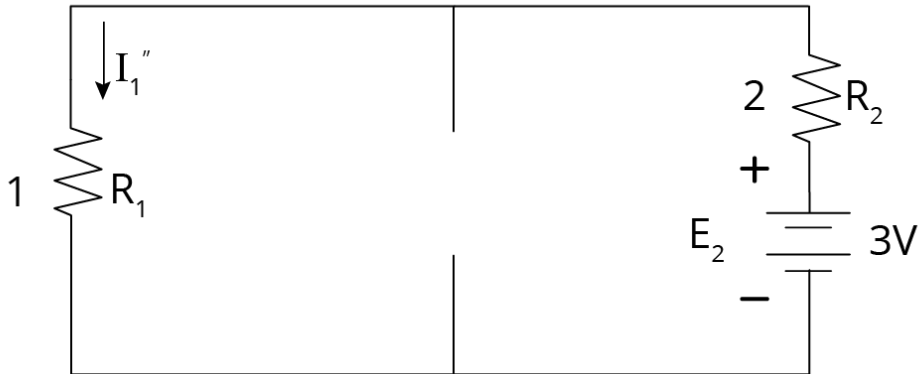


Fonte: Autoria própria.

$$I'_1 = \frac{E_1}{R_1 + R_2} = \frac{6}{1 + 2} = 2A$$

- Analisando a fonte E_2 , temos:

Figura 24 - Circuito elétrico.

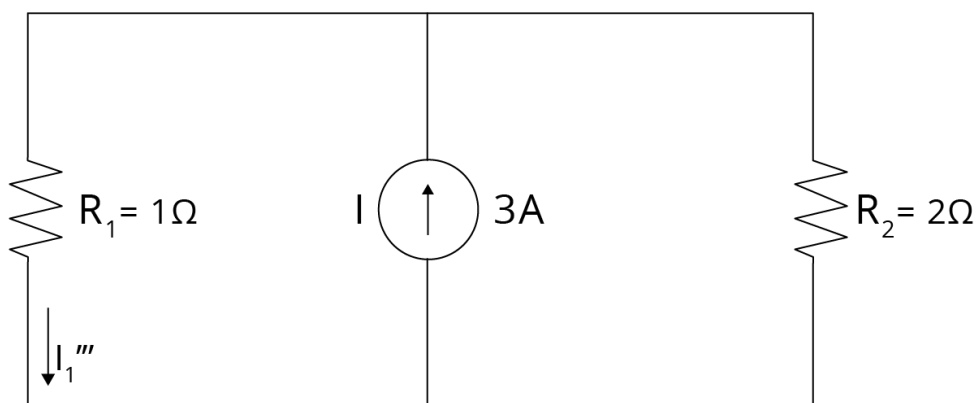


Fonte: Autoria própria.

$$I''_1 = \frac{E_2}{R_1 + R_2} = \frac{3}{1 + 2} = 1A$$

- Analisando a fonte de corrente, temos:

Figura 25 - Circuito elétrico.

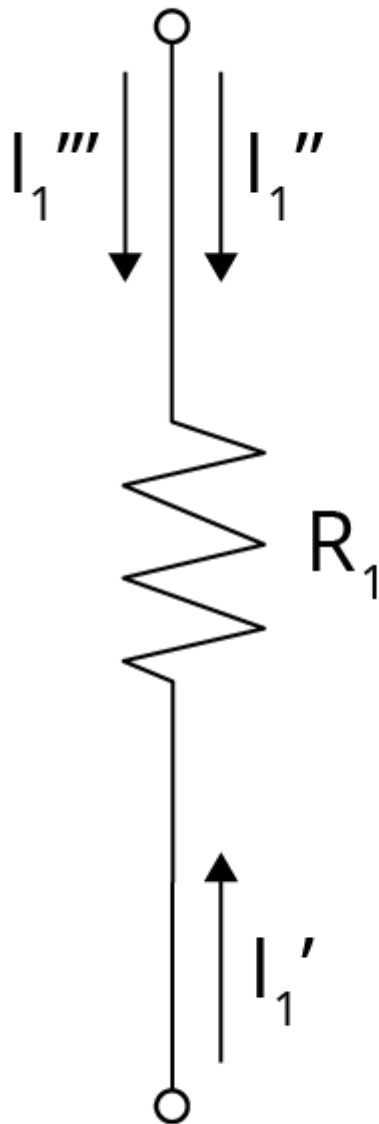


Fonte: Autoria própria.

$$I'''_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{2}{1 + 2} 3 = 2A$$

- Para obter a corrente total, vamos analisar os sentidos das correntes nos circuitos e calcular.

Figura 26 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

$$I_1 = I'''_1 + I''_1 - I'_1 = 2 + 1 - 2 = 1A$$

Na aula de hoje pudemos conhecer um pouco mais sobre o Teorema de Superposição, fundamental para a análise de circuitos elétricos. Na próxima aula, conheceremos mais alguns teoremas... Até lá!

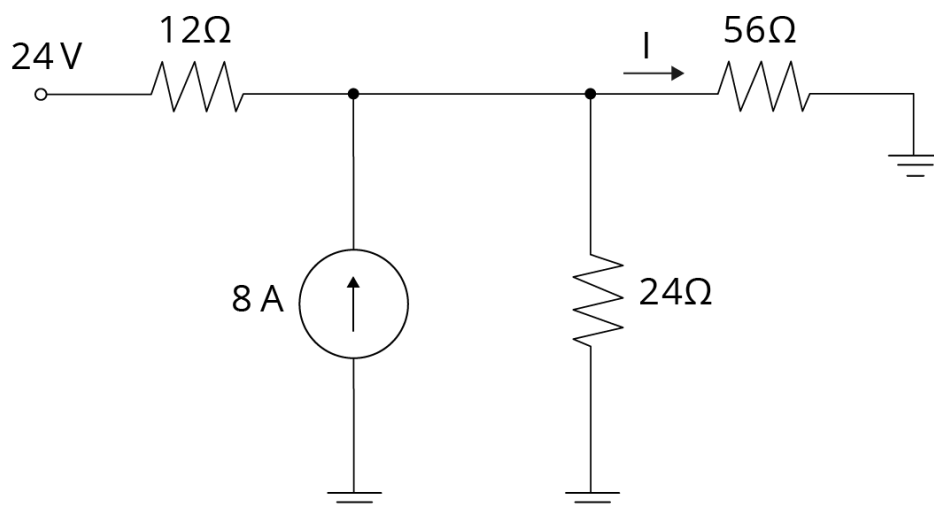
Resumo

Nesta aula foram apresentados os conceitos do divisor de tensão e do divisor de corrente, para que pudesse haver uma base para cálculos de forma mais rápida na análise de circuitos elétricos. Além disso, foi apresentado o teorema de superposição utilizado para análise de circuitos com mais de uma fonte, seja de corrente ou tensão.

Autoavaliação

1. Em quais circuitos pode ser aplicado o teorema da superposição?
2. Por que não podemos calcular a potência de um elemento do circuito usando o teorema da superposição?
3. Usando o teorema da superposição calcule a corrente no resistor de 56Ω , na figura abaixo.

Figura 27 - Circuito elétrico.



Fonte: Autoria própria.

Referências

BOYLESTAD, Robert L. **Introdução à Análise de Circuitos**: Prentice Hall/Pearson, 12ª. Ed, 2015

NILSSON, James W, Susan A. Riedel **Circuitos Elétricos**: Prentice Hall/Pearson, 8ª. Ed, 2008