

# Conceitos de Eletricidade

## Aula 03 - Leis de Kichhoff e Técnicas de Análise de Circuitos

# Apresentação

---

Nesta aula, vamos conhecer a Primeira e a Segunda Lei de Kirchhoff e aprender, associando-as a Lei de Ohm, a fazer a análise de circuitos elétricos e aplicá-las em técnicas de análise usando o método das tensões nodais e o método das correntes de malhas.

## Objetivos

- Caracterizar o que são nós, ramos, laços e malhas de um circuito elétrico.
- Definir a 1ª e a 2ª Lei de **Kirchhoff**.
- Fazer a análise de circuitos elétricos usando as Leis de Kirchhoff associadas aos métodos das tensões nodais e das correntes de malhas.

# Análise de Circuitos em Corrente Contínua

---

Em geral, o processo de resolução de circuitos em corrente contínua baseia-se na Lei de Ohm e nas Leis de Kirchhoff, assim denominadas para homenagear o físico alemão **Gustav Kirchhoff** (1824 - 1887).

## Saiba mais

Gustav Robert Kirchhoff foi um físico alemão com significativas contribuições científicas em várias áreas do conhecimento, tais como, na eletricidade (onde é autor de duas leis fundamentais da teoria clássica dos circuitos elétricos), na espectroscopia, na radiação dos corpos negros (onde, segundo ele, num corpo negro ideal, em equilíbrio termodinâmico a uma temperatura  $T$ , a radiação total emitida é igual à radiação total absorvida) e na teoria da elasticidade (onde, desenvolveu o chamado modelo de placas de Kirchhoff – um modelo matemático bidimensional usado para determinar deformações em placas finas quando submetidas a esforços). Mais informações sobre Kirchhoff podem ser obtidas no site [http://www.sofisica.com.br/conteudos/Biografias/gustav\\_kirchhoff.php](http://www.sofisica.com.br/conteudos/Biografias/gustav_kirchhoff.php) e no site da Wikipédia em [http://pt.wikipedia.org/wiki/Gustav\\_Kirchhoff](http://pt.wikipedia.org/wiki/Gustav_Kirchhoff).

A lei de Ohm nós já conhecemos.

Antes de ser apresentado às Leis de Kirchhoff, é bom saber que:

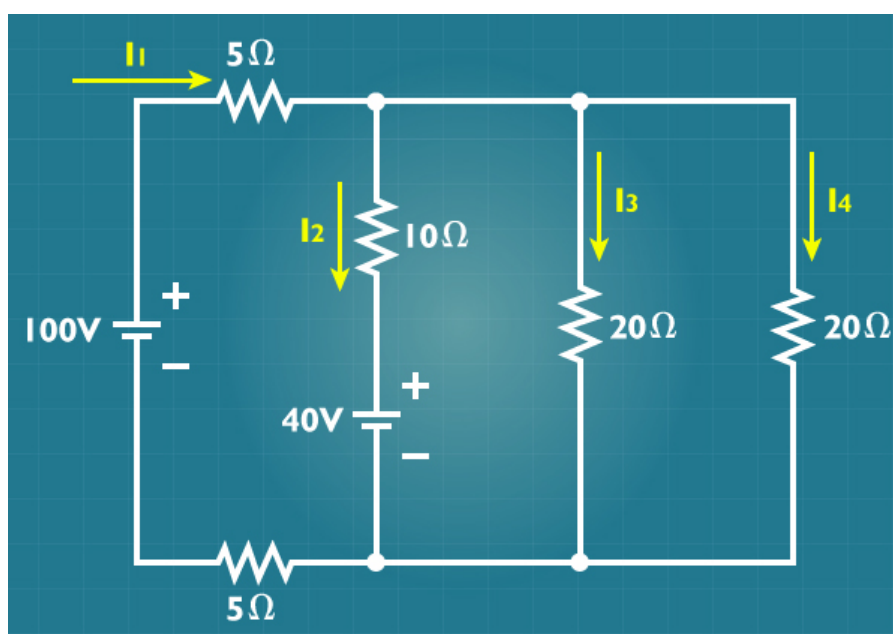
- Um ponto de conexão entre dois ou mais bipolos é conhecido como **nó**.
- Se três ou mais bipolos estão conectados a um nó, ele é chamado de **junção** ou **nó essencial**.
- O trecho de um circuito, compreendido entre dois nós, contendo um elemento simples de circuito, é conhecido como **ramo**.

- Um caminho fechado em um circuito, passando apenas uma vez em cada nó e terminando no nó de partida, é um **laço**, e **malha** é um laço que não contém nenhum outro laço.

## Atividade 01

1. Identifique os nós, os ramos, os laços e as malhas do circuito abaixo. Como sugestão, atribua letras para nomear nós e delimitar ramos. Quantos nós essenciais existem nesse circuito?

**Figura 01** - Circuito proposto para análise da atividade 1



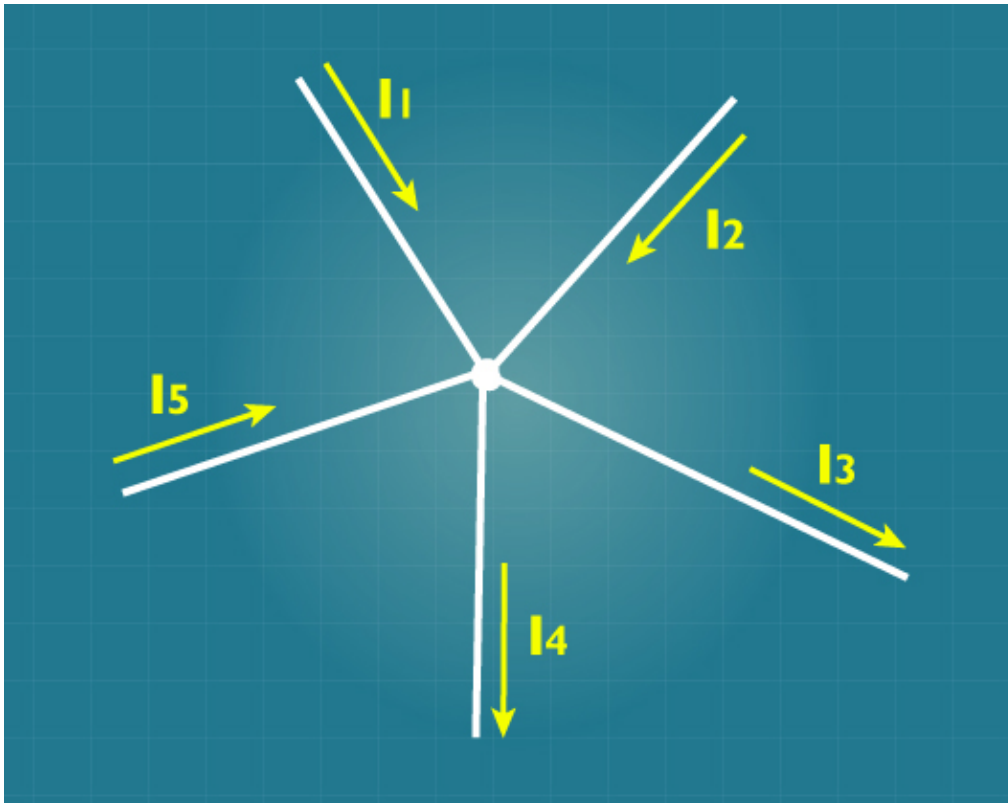
**Fonte:** Autoria própria

## 1ª Lei de Kirchhoff

A 1ª Lei de Kirchhoff é também conhecida como Lei das Correntes de Kirchhoff (LCK) ou Lei dos Nós. Seu enunciado é o seguinte:

- A soma das correntes que entram em um nó é igual à soma das correntes que saem do nó, consideradas todas no mesmo instante.

**Figura 02** - Representação gráfica da 1ª Lei de Kirchhoff



**Fonte:** Autoria própria

Pela primeira Lei de Kirchhoff, na Figura 2 teremos:

$$I_1 + I_2 + I_5 = I_3 + I_4$$

## Atividade 02

---

1. Na Figura 2, se  $I_1 = 7A$ ,  $I_3 = 3A$ ,  $I_4 = 5A$  e  $I_5 = 4A$ , qual o valor de  $I_2$ ? Como interpreta o resultado obtido?

## 2ª Lei de Kirchhoff

---

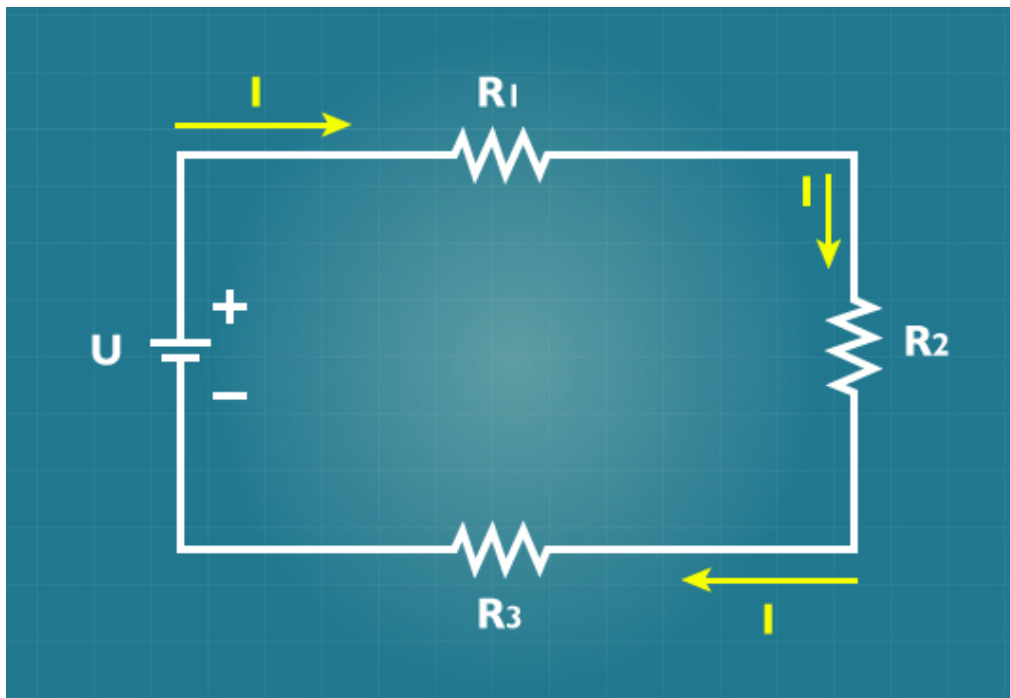
A 2ª Lei de Kirchhoff é também conhecida como Lei das Tensões de Kirchhoff (LTK) ou Lei das Malhas. Seu enunciado é o seguinte:

- A soma algébrica das elevações de tensão ao longo de um caminho que constitui uma malha é igual à soma algébrica das quedas de tensões existentes nessa malha.

Relembrando, entende-se *malha* como um caminho fechado, isto é: partindo de um determinado nó, caminha-se sobre os ramos, ultrapassando outros nós uma única vez, até chegar ao nó de partida. Em resumo, **é um laço que não contém nenhum outro laço.**

Diversas *malhas* podem conter um mesmo nó. Entretanto, nenhum nó pode aparecer de forma repetida em uma mesma malha.

**Figura 03** - Representação gráfica da 2ª Lei de Kirchhoff



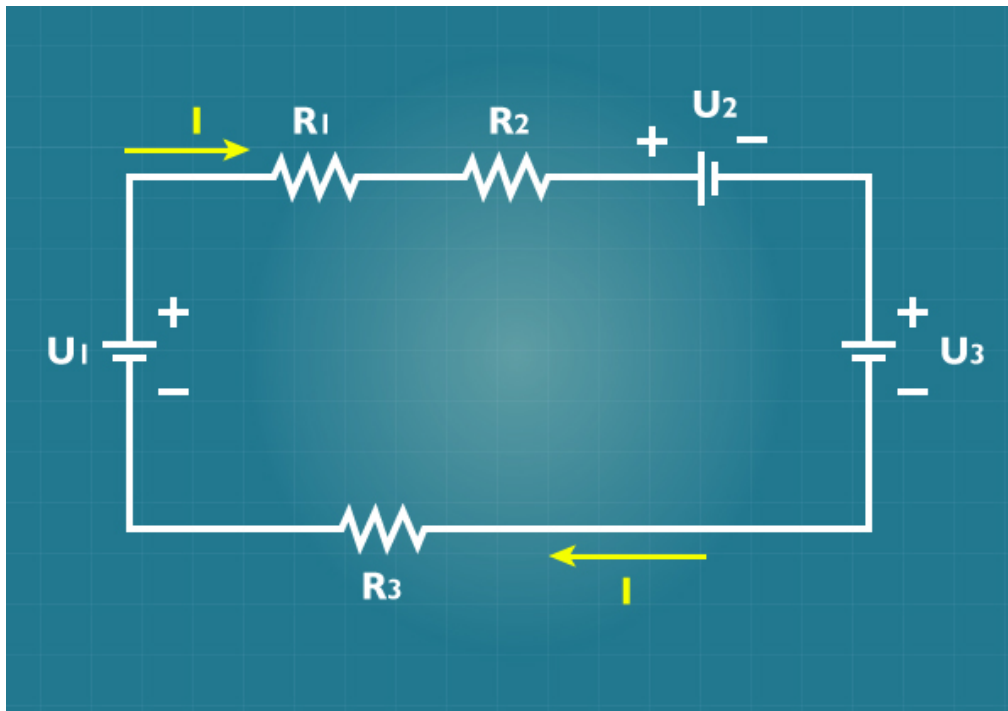
**Fonte:** Autoria própria

Pela 2ª Lei de Kirchhoff, teremos:

$$U = R_1 I + R_2 I + R_3 I.$$

A seguir, vejamos um exemplo envolvendo mais de uma fonte de tensão:

**Figura 04** - Representação gráfica da 2ª Lei de Kirchhoff.



**Fonte:** Autoria própria

Pela 2ª Lei de Kirchhoff, teremos:

$$U_1 = R_1 I + R_2 I + U_2 + U_3 + R_3 I.$$

Observe que, na Figura 4, a mudança de polaridade de qualquer das fontes de tensão implicaria também na mudança de sinal na equação.

## Atividade 03

---

1. Com base na Figura 3, qual o valor da corrente  $I$  se a fonte de tensão é de 12 V,  $R_1 = 1k\Omega$ ,  $R_2 = 1k\Omega$  e  $R_3 = 4k\Omega$ ?

## Atividade 04

---

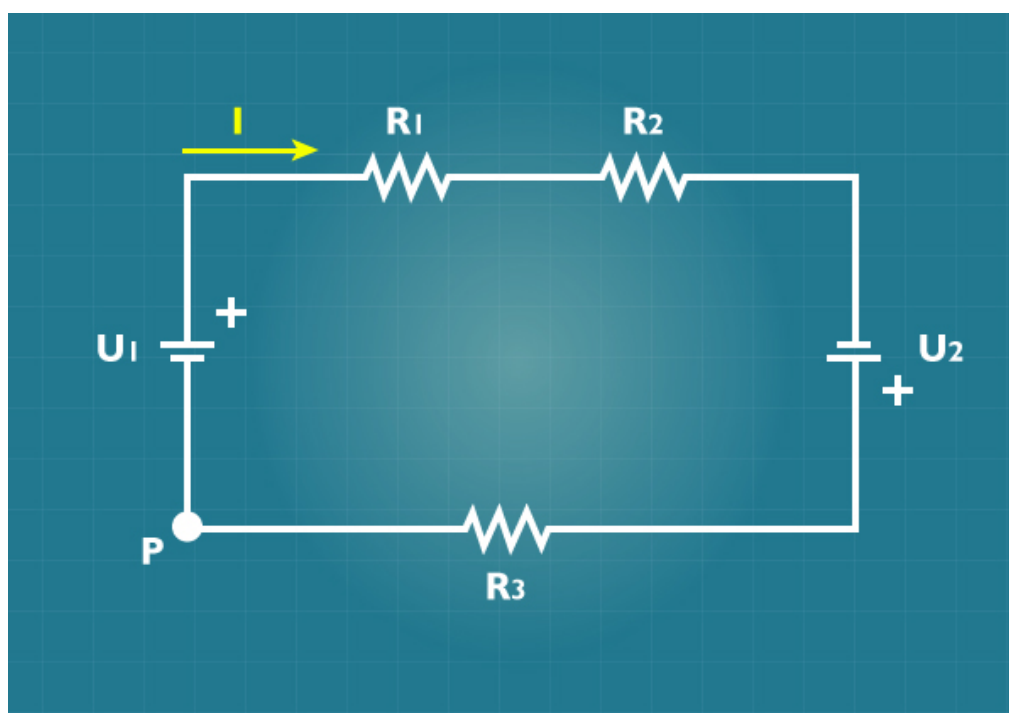
1. Considerando a Figura 4, que diferença de tensão das fontes poderá manter uma corrente de malha de 2,5 mA se as resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  apresentam valores iguais de 4 k $\Omega$ ?

# Aplicações das Leis de Kirchhoff

A aplicação da Lei das tensões de Kirchhoff às vezes se torna um pouco confusa, quando seguida “ao pé da letra”, já que é necessário saber se um elemento está elevando tensão ou subtraindo tensão do circuito quando se percorre uma malha. Para evitar esse tipo de problema, adotam-se convenções de sinais para as tensões presentes no circuito. Tais convenções devem ser seguidas à medida que se percorre uma malha, de preferência, no sentido horário. Uma dessas convenções é usar um sinal negativo para as quedas de tensões provocadas por elementos passivos (como os resistores), um sinal positivo para adições de tensões ou um sinal negativo para as subtrações de tensões na malha, provocados por elementos ativos (como as fontes de tensão).

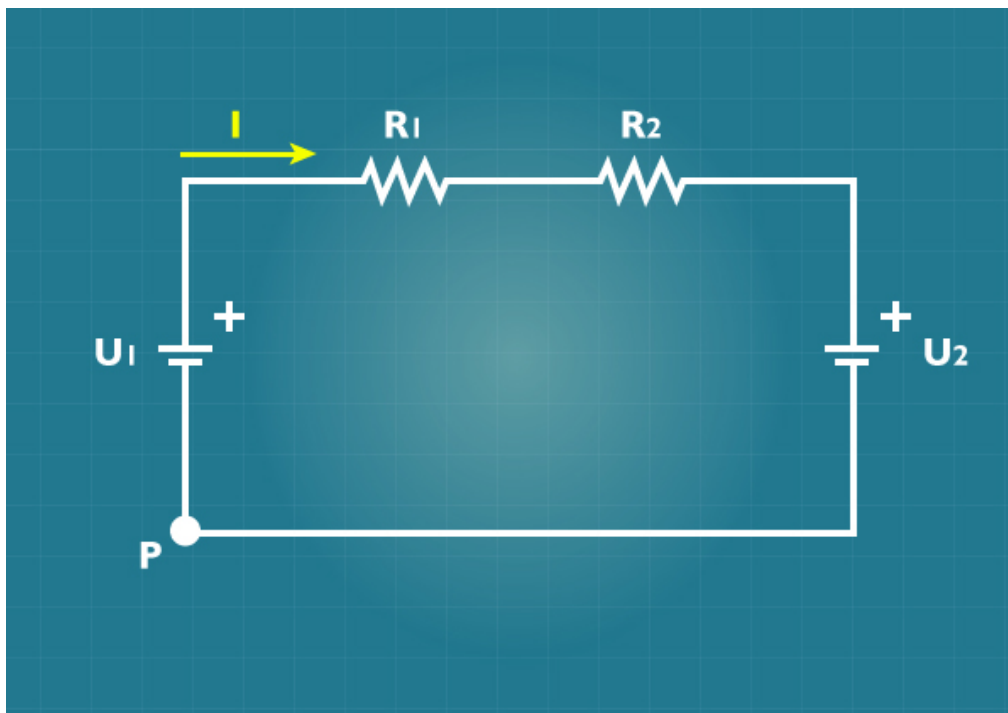
Para exemplificar essa convenção, vamos considerar os circuitos mostrados nas Figuras 5 e 6.

**Figura 05** - Exemplo de um circuito elétrico com duas fontes de tensões de mesma polaridade (aditivas).



**Fonte:** Autoria própria

**Figura 06** - Exemplo de um circuito elétrico com duas fontes de tensões com polaridades subtrativas.



**Fonte:** Autoria própria

Pela Figura 5, começando a percorrer a malha do ponto p até chegarmos novamente ao ponto p, teremos:

$$U_1 - R_1 I - R_2 I + U_2 - R_3 I = 0.$$

Pela Figura 6, começando a percorrer a malha do ponto p até chegarmos novamente ao ponto p, teremos:

$$U_1 - R_1 I - R_2 I - U_2 = 0.$$

## Técnicas de Análise de Circuitos

Quando se tem circuitos com muitas malhas e muitos nós, a análise do circuito pode envolver um número muito grande de equações e incógnitas, tornando a análise bastante complexa. Alguns métodos, como o de análise das tensões nodais e o de correntes de malhas, permitem reduzir essa complexidade. Na análise nodal aplica-se substancialmente a Primeira Lei de Kirchhoff (LCK) e na análise por correntes de malha usa-se sistematicamente a Segunda Lei de Kirchhoff (LTK).

## Método de Análise das Tensões Nodais

O método das tensões nodais é uma técnica de análise de circuitos que consiste em:

– Arbitrar uma tensão ( $U_1, U_2, \dots, U_n$ ), para cada nó essencial de um circuito.

– Designar um destes nós como nó de referência (normalmente o que interliga a maior quantidade de componentes ou o de referencial de terra) atribuindo-lhe tensão zero (0 V)

– Aplicar a Lei das Correntes de Kirchhoff para calcular as tensões nos **n - 1** nós essenciais (excluído o nó de referência). Normalmente, arbitram-se todas as correntes saindo do nó, exceto no caso de haver alguma fonte de corrente em um dos ramos cujo sentido da corrente seja entrando no nó.

Por esse método, se houver **n** nós essenciais, haverá **n-1** equações e **n-1** tensões incógnitas. Desse modo, sempre se obterá um sistema linear, quadrado, que, quando resolvido, terá como soluções os valores das tensões incógnitas. Com os valores das tensões dos nós, pode-se facilmente calcular as correntes de todos os ramos.

Pela Lei de Ohm, o valor da corrente que percorre um ramo com um elemento passivo resistivo, entre dois pontos referenciais de tensão, como mostrado na Figura 7, será dado por  $I = (U_1 - U_2)/R$ .

**Figura 07** - Sentido de corrente entre dois nós de tensões (tensão  $U_1 >$  tensão  $U_2$ ).

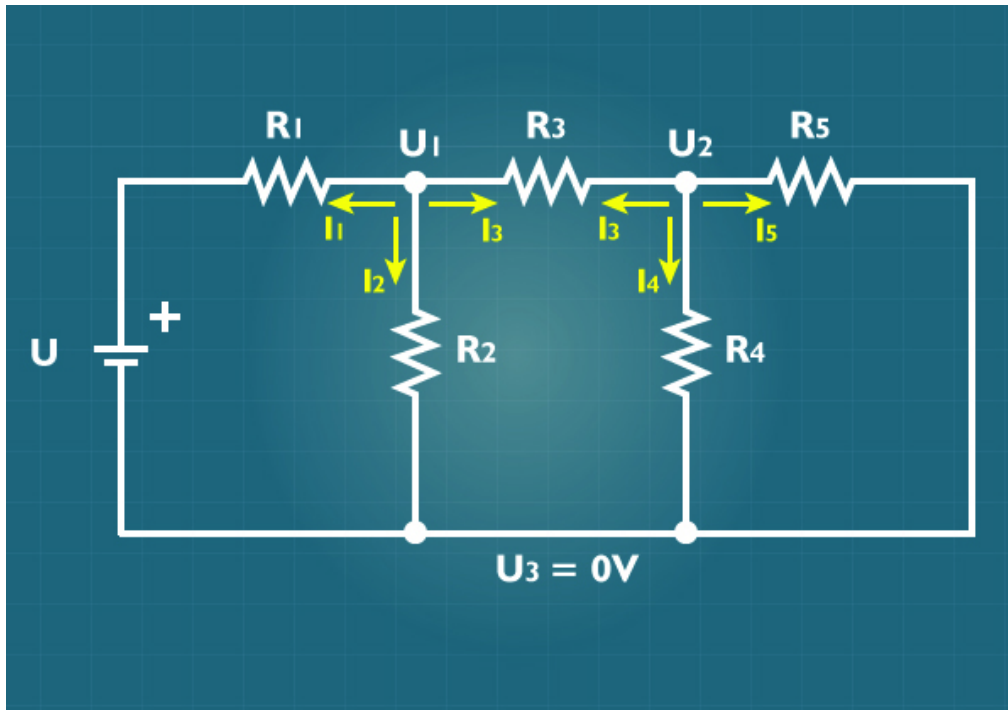


**Fonte:** Autoria própria.

# Exemplos de Análise de Circuitos Pelo Método das Tensões Nodais

Exemplo 1: fazer a análise do circuito mostrado na Figura 8, usando o método das tensões nodais.

**Figura 08** - Circuito elétrico com uma fonte de tensão usado para a análise nodal do exemplo 1.



**Fonte:** Autoria própria.

Na Figura 8, podem ser identificados três nós essenciais, aos quais são designadas as tensões nodais  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ . Essa última tomada como referência e sendo-lhe atribuída um valor de tensão de 0 V.

Para o nó 1, teremos:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

Como  $U_1 - U = R_1 I_1$ , teremos  $I_1 = (U_1 - U)/R_1$ .

Como  $U_1 - U_3 = R_2 I_2$ , teremos  $I_2 = (U_1 - 0)/R_2$  ou seja,  $I_2 = U_1/R_2$ .

Como  $U_1 - U_2 = R_3 I_3$ , teremos  $I_3 = (U_1 - U_2)/R_3$ .

Ou seja, para o nó 1, teremos uma primeira equação definida por:

$$(U_1 - U)/R_1 + U_1/R_2 + (U_1 - U_2)/R_3 = 0.$$

Para o nó 2, teremos:

$$I_3 + I_4 + I_5 = 0.$$

Como  $U_2 - U_1 = R_3 I_3$ , teremos  $I_3 = (U_2 - U_1)/R_3$ .

Como  $U_2 - U_3 = R_4 I_4$ , teremos  $I_4 = (U_2 - 0)/R_4$  ou seja,  $I_4 = U_2/R_4$ .

Como  $U_2 - U_3 = R_5 I_5$ , teremos  $I_5 = (U_2 - 0)/R_5$  ou seja,  $I_5 = U_2/R_5$ .

Ou seja, para o nó 2, teremos uma segunda equação definida por:

$$(U_2 - U_1)/R_3 + U_2/R_4 + U_2/R_5 = 0.$$

Considerando que a tensão de fonte  $U$  e que os valores das resistências  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  são conhecidos, temos, como estimado pelo método, duas equações e duas incógnitas, que são as tensões nodais  $U_1$  e  $U_2$ . Resolvendo o sistema com duas equações encontraremos  $U_1$  e  $U_2$ .

Conhecidas as tensões nodais  $U_1$  e  $U_2$ , facilmente se definem as correntes de ramos  $I_1, I_2, I_3$  e  $I_4$ . Caso alguma das correntes apresente um valor negativo, subtende-se que sua direção é contrária a inicialmente fixada.

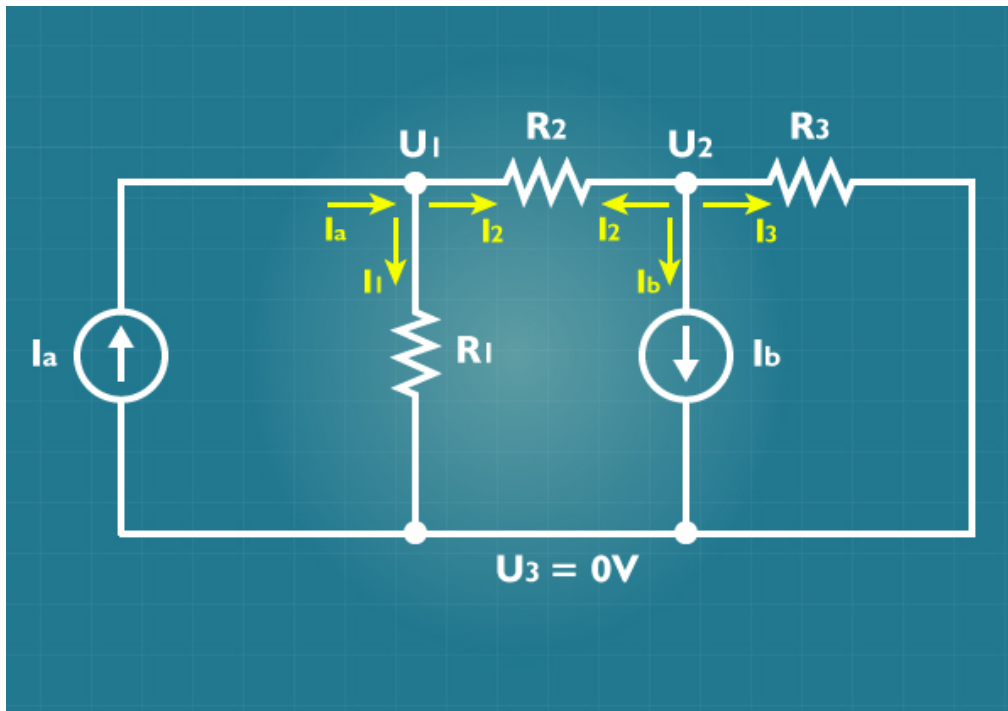
## Atividade 05

---

1. Encontre as correntes  $I_1, I_2, I_3$  e  $I_4$  para o circuito da Figura 8 admitindo que a fonte seja de 12 V e que as resistências  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$  apresentem valores iguais de 1 k $\Omega$ .
- 

Exemplo 2: fazer a análise do circuito mostrado na Figura 9, usando o método das tensões nodais.

**Figura 09** - Circuito elétrico com duas fontes de corrente usado na análise nodal do exemplo 2.



**Fonte:** Autoria Própria.

Na Figura 9, também podem ser identificados três nós essenciais, aos quais são designadas as tensões nodais  $U_1$ ,  $U_2$  e  $U_3$ . Essa última tomada como referência e lhe sendo atribuída um valor de tensão de 0 V.

Percebe-se também no circuito, a ausência de fontes de tensão e a presença de duas fontes de corrente  $I_a$  e  $I_b$ .

Para o nó 1, teremos:

$$I_a = I_1 + I_2$$

Como  $U_1 - U_3 = R_1 I_1$ , teremos  $I_1 = (U_1 - U_3)/R_1$ , ou seja,  $I_1 = U_1/R_1$

Como  $U_1 - U_2 = R_2 I_2$ , teremos  $I_2 = (U_1 - U_2)/R_2$ .

Ou seja, para o nó 1, teremos uma primeira equação definida por:

$$I_a = U_1/R_1 + (U_1 - U_2)/R_2.$$

Para o nó 2, teremos:

$$I_2 + I_3 + I_b = 0.$$

Como  $U_2 - U_1 = R_2 I_2$ , teremos  $I_2 = (U_2 - U_1)/R_2$ .

Como  $U_2 - U_3 = R_3 I_3$ , teremos  $I_3 = (U_2 - 0)/R_3$  ou seja,  $I_3 = U_2/R_3$ .

Ou seja, para o nó 2, teremos uma segunda equação definida por:

$$(U_2 - U_1)/R_2 + U_2/R_3 + I_b = 0.$$

Considerando que as correntes de fontes  $I_a$  e  $I_b$  e que os valores das resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  são conhecidos, temos, como estimado pelo método, duas equações e duas incógnitas, que são as tensões nodais  $U_1$  e  $U_2$ . Resolvendo o sistema com duas equações, encontraremos  $U_1$  e  $U_2$ .

Conhecidas as tensões nodais  $U_1$  e  $U_2$ , facilmente se definem as correntes de ramos  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ . Caso alguma das correntes apresente um valor negativo, subtende-se que sua direção é contrária a inicialmente fixada.

## Atividade 06

---

1. Encontre as correntes  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$  para o circuito da Figura 9, admitindo que as correntes das fontes sejam  $I_a = 10$  mA e  $I_b = 12$  mA e que as resistências  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$  são de 1 k $\Omega$ , 2 k $\Omega$  e 1 k $\Omega$ , respectivamente.
- 

## Método de Análise por Correntes de Malhas

O método das correntes de malhas é uma técnica de análise de circuitos só aplicável à circuitos elétricos planares. Os circuitos elétricos planares são todos aqueles que podem ser desenhados numa superfície plana, sem que dois ramos se cruzem.

Esse método das correntes de malhas consiste em:

– Arbitrar correntes de malhas ( $I_1, I_2, \dots, I_n$ ) para todas as malhas do circuito de forma a garantir que todo elemento do circuito seja percorrido por, pelo menos, uma dessas correntes.

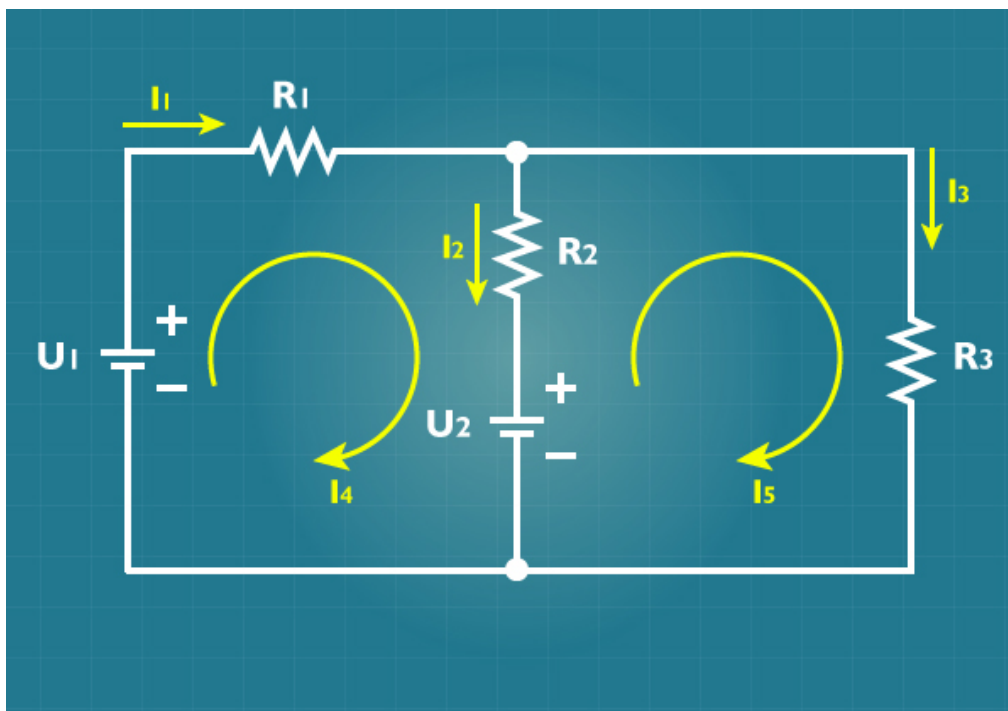
- Aplicar a Lei das Tensões de Kirchhoff para calcular as correntes nas  $n$  malhas do circuito, normalmente arbitrando-se todas as correntes de malhas no sentido horário.

Para ter uma melhor compreensão do que sejam essas correntes de malhas, considere o circuito apresentado na Figura 10, onde,  $I_4$  e  $I_5$  são designadas de correntes de malhas. No circuito, estão também referenciadas as correntes de ramos  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ .

Pela Figura 10, dá para se tirar as seguintes conclusões:

1.  $I_4$  é a corrente da malha que contém os componentes  $U_1$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  e  $U_2$ .
2.  $I_5$  é a corrente da malha que contém os componentes  $U_2$ ,  $R_2$  e  $R_3$ .
3.  $I_1 = I_4$ .
4.  $I_2 = I_4 - I_5$ .
5.  $I_3 = I_5$ .

**Figura 10** - Representação de correntes de malha.



**Fonte:** Autoria própria.

Percorrendo-se a malha com corrente  $I_4$ , teremos:

$$U_1 - R_1 I_4 - R_2 I_4 + R_2 I_5 - U_2 = 0.$$

Percorrendo-se a malha com corrente  $I_5$ , teremos:

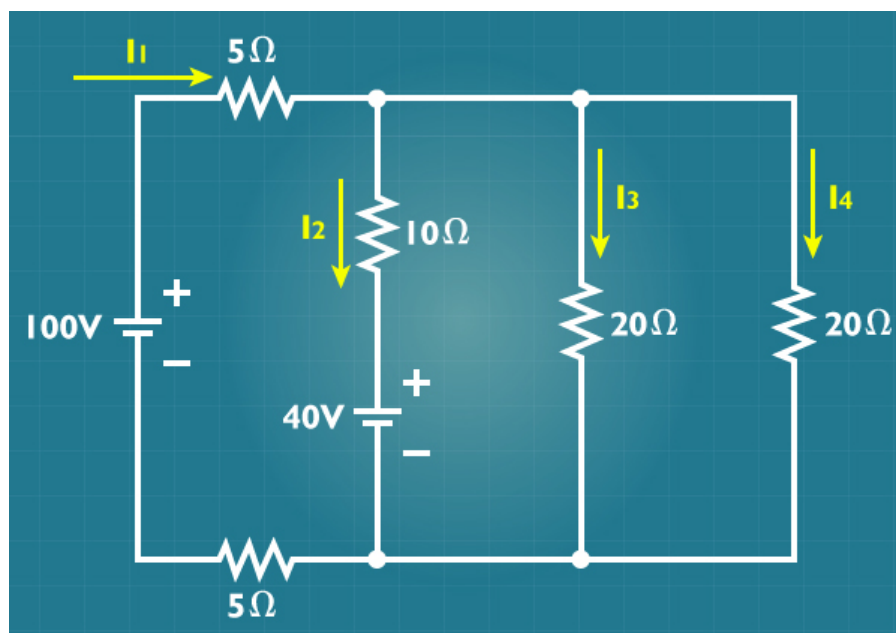
$$U_2 - R_2 I_5 + R_2 I_4 - R_3 I_5 = 0$$

Considerando que são conhecidas as tensões  $U_1$  e  $U_2$  e os valores dos resistores  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_3$ , fica fácil encontrar os valores das correntes de malhas  $I_4$  e  $I_5$ , por conseguinte, as correntes de derivação de ramos  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$

## Atividade 07

1. Usando o método das correntes de malhas, encontre no circuito abaixo as correntes  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$ .

**Figura 11** - Circuito elétrico proposto para a Atividade 8.



**Fonte:** Autoria Própria.

Se sua análise estiver correta,  $I_1 = 5,33$  A, ok?

# Resumo

---

Nesta aula, você conheceu as definições da Primeira e da Segunda Lei de Kirchhoff. Aprendeu a calcular tensões e correntes em circuitos resistivos usando a Lei de Ohm e as Leis de Kirchhoff. Além disso, aprendeu o que são tensões nodais e correntes de malha e como elas podem nos ajudar a calcular tensões e correntes em circuitos elétricos com fontes de tensão e/ou com fontes de correntes.

## Autoavaliação

---

1. Caracterize o nó, o ramo e a malha em um circuito elétrico.
2. O que são nós essenciais?
3. O que diz a Primeira Lei de Kirchhoff?
4. O que diz a Segunda Lei de Kirchhoff?
5. O que são tensões nodais?
6. O que são correntes de malhas?
7. Para análise por tensões nodais é usada que Lei de Kirchhoff? E para análise por correntes de malhas?

## Referências

---

FERNANDES, Thelma S. P. **Circuitos resistivos**: capítulo 3. Disponível em: <<http://www.eletrica.ufpr.br/thelma/Capitulo3.pdf>>. Acesso em: 16 mar. 2014.

MARIZ, Jaime. **Apostila eletrotécnica básica**. [S.l.]: UFRN, [20-?].

SAAVEDRA FILHO, Nestor Cortez. **Curso de formação de operadores de refinaria física aplicada**: eletricidade básica. [S.l.]: Petrobrás, 2002

SANTOS, Antônio. **Eletricista de força e controle**: conceitos básicos de eletricidade. [S.l.]: Petrobrás/CEFET-BA, [20--?].